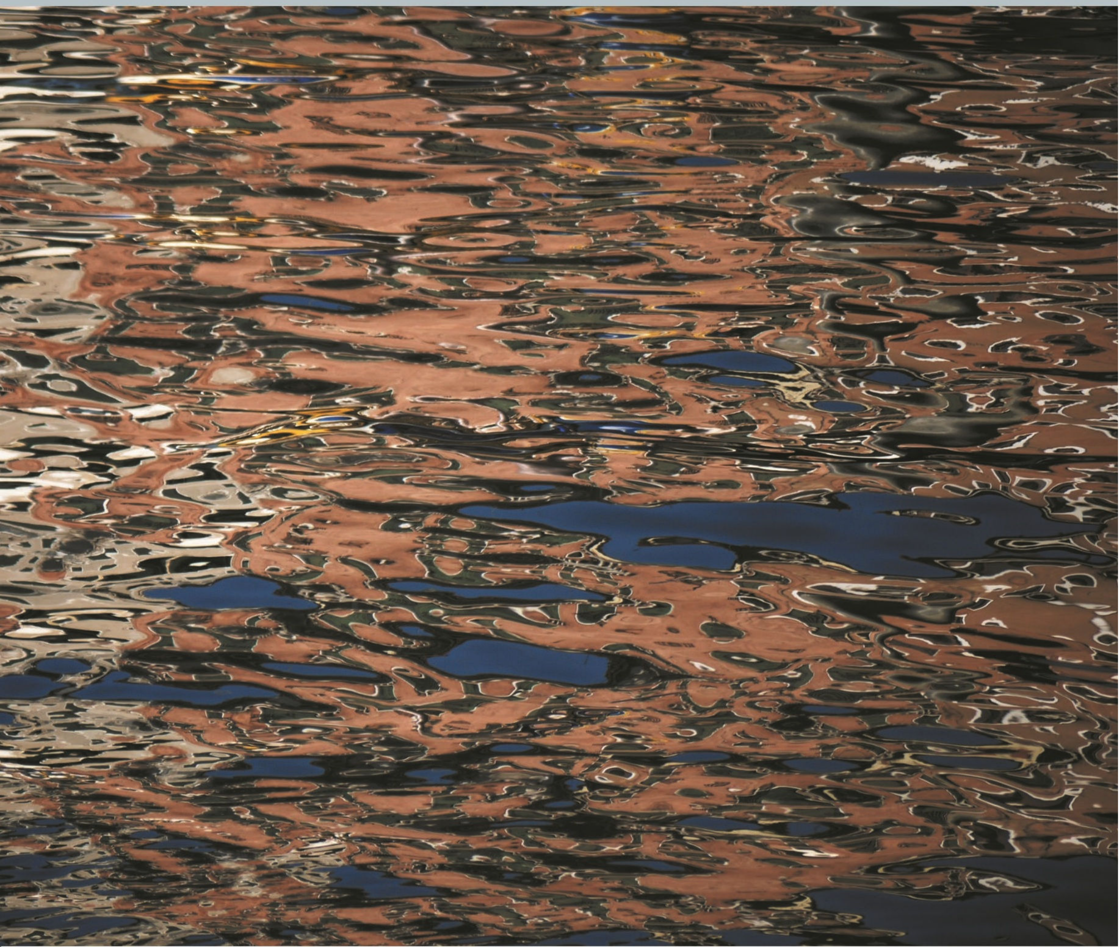
Matematicamente.it

Paolo Bonavoglia

IL CALCOLO INFINITESIMALE

Analisi per i licei alla maniera Non Standard



Paolo Bonavoglia

IL CALCOLO INFINITESIMALE

Analisi per i licei alla maniera non standard

www.matematicamente.it – libri@matematicamente.it

La versione digitale dell'opera
è disponibile gratuitamente al sito
www.matematicamente.it

Stampa
Universal Book – via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)

ISBN 9788896354131

Sommario

PREFAZIONE

L'analisi nei licei

Analisi nei licei sì o no? E se sì in che modo e in che misura? Una domanda che si ripropone ad ogni riforma o riordino delle scuole superiori. Nei licei italiani l'analisi fu inserita a inizio Novecento in occasione della riforma Credaro; a stilarne i programmi fu chiamato Guido Castelnuovo che così giustificò questa scelta:

> «Ma se si vuole che l'allievo delle scuole medie senta di questa matematica moderna il soffio ispiratore ed intravveda la grandezza dell'edifizio, occorre parlargli del concetto di funzione ed indicargli sia pure sommariamente, le due operazioni che costituiscono il fondamento del Calcolo infinitesimale.»[1]

Allora l'analisi fu inserita solo nel liceo moderno, che fu poi soppresso dalla riforma Gentile del 1923 e in qualche misura sostituito dal liceo scientifico che ereditò l'analisi come materia conclusiva del corso di matematica. Nei licei classici dove il peso della matematica fu ridimensionato l'analisi continuò a restare fuori, come del resto la geometria analitica.
Di fatto la geometria analitica fu inserita dopo la guerra nei libri di testo del liceo classico e collocata tra la prima e seconda liceo (terzo e quarto anno); l'analisi continuò a restarne fuori con l'eccezione della sperimentazione PNI diffusisi tra gli anni Ottanta e Novanta.
Negli istituti tecnici l'analisi c'è sempre stata e viene in genere trattata già nel quarto anno di corso, a volte anticipando anche al terzo.
Ma come viene affrontata l'analisi nei licei?

---

1 Il passo è tratto da LIVIA GIACARDI - *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità al Fascismo in Da Casati a Gentile* ... Agorà Publishing 2006 pag.44

Caratteristiche di fondo sono:

1. L'analisi è in genere posta al termine del corso di studi.
2. Si segue la sequenza limiti, derivate, integrali come all'Università, con inevitabili alleggerimenti ma sempre secondo l'impostazione Cauchy-Weierstrass.
3. Nessun cenno viene fatto alla storia del calcolo infinitesimale.
4. Obiettivo principale se non unico sembra essere quello di addestrare gli studenti in vista delle facoltà scientifiche.

Un simile approccio presenta più di un difetto:

1. La collocazione al termine del corso comporta molto spesso il taglio degli ultimi argomenti, e si tratta quasi sempre degli integrali, cassando così proprio una della due operazioni fondamentali di cui parlava Castelnuovo, in una certa misura la più importante di tutte. È quasi la norma che lo studente debba studiare in gran dettaglio i limiti e i teoremi sui limiti e solo in modo frettoloso gli integrali.
2. Questa collocazione rende di fatto impossibili ogni collegamento con il programma di Fisica.
3. Si comincia dai limiti, scontrandosi con le ben note difficoltà della definizione *epsilon-delta* di Weierstrass e con la notevole complicazione di quasi tutte le dimostrazioni.
4. Non viene fatto alcun cenno alla storia dell'analisi che viene presentata come una dottrina caduta dal cielo così com'è; non sembra questa la scelta didatticamente migliore in un liceo.

L'approccio NSA presentato in questo libro cerca di superare questi difetti, anche se verosimilmente si tratta solo di un primo tentativo che può essere migliorato.

Il libro si basa sull'esperienza personale dell'autore, esperienza che può certamente essere migliorata, ma che mi pare sufficiente a convincere dei vantaggi che questo approccio darebbe all'insegnamento dell'analisi.

INTRODUZIONE STORICA

Il ritorno dell'infinitesimo

È un ramo della matematica dai molti nomi, all'inizio si chiamò *calcolo infinitesimale*, o anche *calcolo differenziale*, poi fu detto *calcolo sublime*, sin dall'inizio ebbe anche il nome di *analisi* a volte come *analisi matematica*, altre come *analisi infinitesimale*.
Chi oggi studia analisi nelle scuole secondarie o all'Università faticherà a capire il motivo di quell'aggettivo *infinitesimale* che ogni tanto riappare.
Perché oltre ad aver cambiato più volte di nome, l'analisi ha anche cambiato le sue stesse fondamenta.
All'inizio con Leibniz, insieme a Newton padre fondatore di questa disciplina, a fondamento di tutto era l'*infinitesimo*, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, derivate e integrali si definivano semplicemente come rapporti o somme di infinitesimi.
La prima contestazione arrivò nel Settecento ad opera di George Berkeley filosofo empirista e vescovo anglicano che mise in luce gli aspetti contraddittori degli infinitesimi definendoli *spettri di quantità estinte* (*ghosts of departed quantities)*.
Nonostante queste critiche il calcolo divenne rapidamente uno strumento irrinunciabile per i matematici ma soprattutto per fisici e ingegneri e le critiche di Berkeley restarono sullo sfondo di fatto irrisolte.
Solo nell'Ottocento il problema delle basi dell'analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy che ridefinì derivate e integrali in termini di *limiti* invece che di infinitesimi e poi di Karl Weierstrass che diede una definizione rigorosa di limite, quella nota come *epsilon-delta*.
Gli infinitesimi divenuti superflui furono cacciati dall'universo matematico; di fatto continuarono a essere usati con il nuovo nome di *differenziali*.

Il rigore di Cauchy e Weierstrass comportava però un prezzo elevato: una considerevole complicazione di buona parte delle definizioni e delle dimostrazioni dell'analisi. La definizione epsilon-delta è astrusa e di non immediata comprensione per gli studenti, le dimostrazioni vengono ad essere più complicate e oscure, per esempio le regole di derivazione della funzione composta o della funzione inversa, di dimostrazione quasi immediata usando gli infinitesimi, richiedono dimostrazioni lunghe e contorte usando l'approccio di Cauchy e Weierstrass.
Certamente di questa idea era Abraham Robinson, nostalgico degli infinitesimi di Leibniz, che tra il 1960 e il 1966 riuscì a dare un fondamento logico rigoroso a questi numeri che Berkeley aveva considerato *spettrali*.
Nel suo libro *Non-standard Analysis* Robinson scriveva[2]:

> However in spite of this shattering rebuttal, the idea of infinitely small or infinitesimal quantities seems to appeal naturally to our intuition,[3]

Robinson in realtà non era un analista ma un logico-matematico e fu proprio un teorema della logica, quello di compattezza che gli fornì lo strumento per reintrodurre con tutti gli onori gli infinitesimi (numeri non standard) nella matematica, dopo un secolo di *esilio*.
L'analisi rifondata da Robinson si basa nuovamente sugli infinitesimi, e prende il nome di *Analisi Non Standard*, in inglese *Non Standard Analisis* (NSA).
Kurt Gődel uno dei più grandi matematici del Novecento, che di Robinson era amico, nel marzo 1973 disse in un discorso a favore della NSA[4]:

> *[...]This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of Non-standard Analysis, namely the idea*

---

2 A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1966-1996, pag.2

3 D'altra parte nonostante questo rifiuto, l'idea di quantità infinitamente piccole o infinitesime sembra naturalmente attraente per la nostra intuizione.

4 A,ROBINSON, *ibidem*, pag. xvi.

> *that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that Non-standard Analysis in some version or other, will be the analysis of the future.*[5]

e subito dopo specificò così le ragioni che dovrebbero fare della NSA l'analisi del futuro.

> *One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers etc. But the next quite natural step after the reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted [...]*[6].

Sono passati quasi quarant'anni da questa profezia di Gődel e la NSA sembra ancora confinata in un Limbo, in particolar modo in Italia dove finora ha incontrato più diffidenza che altro.
Al di là delle ragioni enunciate da Gődel la NSA presenta un altro aspetto interessante e cioé che sembra particolarmente adatta ad un primo approccio all'analisi, in particolare nelle scuole secondarie; l'ambizione di questo libro è proprio quella di mostrare come questo sia possibile.

---

5 Questa situazione dovrebbe metterci al riparo dal un fraintendimento piuttosto comune dell'analisi non-standard, e cioè l'idea che si tratti di una qualche sorta di stravaganza o smania dei logici-matematici. Nulla potrebbe essere più lontano dalla verità. Piuttosto ci sono buone ragioni per credere che in una forma o in un'altra la NSA sarà l'analisi del futuro.

6 Una di queste ragioni è la già ricordata semplificazione delle dimostrazioni, dal momento che la semplificazione facilita la scoperta. Un altra, ancor più convincente ragione, è la seguente: l'Aritmetica inizia con i numeri interi e continua allargando via via il sistema dei numeri con i numeri razionali e i negativi, gli irrazionali ecc. Ma il successivo passo piuttosto naturale dopo i reali, e cioé l'introduzione degli infinitesimi, è stata semplicemente omessa

Ma è proprio necessaria l'analisi nei licei?

Nel corso degli anni si sono spesso alzate voci contro lo studio dell'analisi nei licei. Ne riporto solo due:

a) Nell'era dei computer e del calcolo numerico, è opportuno dare più peso alla matematica del discreto e meno a quella del continuo; e l'analisi è per eccellenza la matematica del continuo.
b) È inutile insegnare analisi nei licei perché in poco tempo non è possibile per lo studente comprendere a fondo concetti così difficili; gli studenti arrivano all'Università illudendosi di conoscere l'analisi quando in realtà ne hanno capito ben poco.

Il punto a) è, a mio avviso, il più valido; in effetti sarebbe necessario dare più spazio alla matematica discreta o a quella dell'incerto (probabilità e statistica); a questo punto di tempo per fare anche analisi rischia di restarne ben poco.
A mio modo di vedere il punto a) impone semmai di ridimensionare lo studio dell'analisi non di cassarlo del tutto. Una persona di cultura dovrebbe pur avere una qualche idea su derivate e integrali. In effetti l'insegnamento dell'analisi nei licei ha finito per andare ben al di là di quell'*indicare sommariamente* di cui parlava Castelnuovo. Forse sarebbe opportuno tornare a quell'obiettivo minimale.
Riguardo il punto b) si tratta di un vecchio argomento che può essere usato, ed è stato usato, per molti argomenti considerati difficili. Nella sua prefazione al volumetto "Il calcolo infinitesimale" W. W. Sawyer scrive:

> Se mi si chiedesse di scrivere su un foglio di carta tutte le proposizioni di cui sono veramente certo, quelle proposizioni che dovrebbero essere valide in ogni tempo e in ogni luogo, ebbene io restituirei quel foglio in bianco.[7]

Concetti molto simili erano già stati espressi dal già citato Guido Castelnuovo agli inizi del Novecento come risulta da questa

7 W. W. SAWYER, *Il calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna 1979, pag.11.

antologia di citazioni:

> Ciò che si sa dal professore o dall'allievo - mi fu detto - sia pur limitato, ma deve sapersi perfettamente. Orbene, io sono uno spirito mite e tollerante; ma tutte le volte che questa frase mi fu obiettata, un maligno pensiero mi ha attraversato come un lampo la mente. Oh, se potessi prendere in parola il mio interlocutore, e con magico potere riuscissi a spegnere per un istante nel suo cervello tutte le cognizioni vaghe per lasciar sussistere soltanto ciò che egli sa perfettamente! Voi non immaginate mai quale miserando spettacolo potrei presentarvi! Ammesso pure che dopo una cosi crudele mutilazione qualche barlume rimanesse ancor nel suo intelletto, e di ciò fortemente dubito, somiglierebbe questo ad un gioco di fuochi folletti sperduti in tenebre profonde e sconfinate. La verità è che noi nulla sappiamo perfettamente ... [8]

> E' questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegniamo a diffidare dell'approssimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusoria...[9]

> il ragionamento formalmente perfetto non è né l'unico, né, molte volte, il miglior modo per giungere alla verità. È ben spesso preferibile ricorrere ad un ragionamento approssimato, i cui passi successivi vengano sottoposti al riscontro dei fatti, per sceverare via, via il vero dal falso, piuttosto che affidarsi ad una logica impeccabile, chiudendo gli occhi al mondo esterno. Ora la matematica (come oggi si insegna nelle scuole di cultura generale) disprezza a torto quel primo tipo di procedimento logico, e condanna in tal modo l'unica forma di ragionamento che sia concessa alla maggioranza degli uomini![10]

---

8 Emma Castelnuovo, *La didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze 1964, pag. 157.

9 Emma Castelnuovo – *Didattica della matematica* – La Nuova Italia 1964 pag. 5

10 Guido Castelnuovo - *Il valore didattico della matematica e della fisica* -

Questo libro

Questo libro raccoglie, riorganizza e amplia materiale da me utilizzato per l'insegnamento dell'analisi nelle ultime due classi del liceo classico utilizzando un approccio che chiamerò *NSA-light* nel senso che ricalca l'analisi NSA ma con molti alleggerimenti.

Nel corso degli anni ho cambiato molte volte l'ordine e la collocazione dei vari argomenti dell'analisi, qui ne propongo uno, che non è necessariamente l'unico possibile.

La prima parte intitolata "Primi passi nel calcolo infinitesimale" ricalca in realtà più l'analisi di Leibniz che quella NSA, cerca di partire dagli esempi per arrivare a definizioni abbastanza rigorose, ma senza insistere troppo sul formalismo e sul rigore. Vengono introdotte sia le derivate sia gli integrali, ma solo per polinomi. Qui l'importante è abituarsi ai concetti di derivata ed integrale più che insistere su definizioni rigorose e complicazioni di calcolo. In questo modo è già possibile qualche non spregevole interazione con la Fisica. Questa è la parte svolta nel penultimo anno di corso.

La seconda parte utilizza più decisamente l'approccio NSA ed estende l'analisi anche a funzioni irrazionali, esponenziali, logaritmiche e goniometriche; alla fine vi è anche una trattazione dei limiti e di alcuni problemi correlati (asintoti).

Nel testo sono intercalati anche alcuni capitoli di analisi numerica, in particolare sul calcolo approssimato delle aree e degli integrali e sull'approssimazione polinomiale (polinomi di Taylor e Maclaurin).

Paolo Bonavoglia
Venezia, maggio 2011

«Rivista di Scienza», I, 1907 ripreso da ALDO BRIGAGLIA - *La concezione didattica di Castelnuovo* a pag. 172 del recente LIVIA GIACARDI E ALTRI – *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento della matematica in Italia.* - Agorà Publishing 2006

1 - PRIMI PASSI NEL CALCOLO INFINITESIMALE

In questa prima parte vediamo come e da quali problemi è nato il calcolo infinitesimale; si arriverà a saper calcolare la derivata di un polinomio, a saper determinare la tangente ad una qualsiasi curva algebrica intera in un qualsiasi punto, e a saper trovare i punti stazionari (massimi, minimi, flessi) di una curva algebrica.

1.1 Il problema della tangente

René Descartes (Cartesio) all'inizio del seicento rivoluzionò la matematica mostrando come la retta e le curve geometriche come circonferenza, parabola, ellissi potevano essere rappresentate da equazioni algebriche. Fino allora calcolo e geometria erano stati rami ben distinti della matematica, quello della geometria essendo il regno delle dimostrazioni e della logica; Cartesio mostrò che anche la Geometria poteva essere ridotta in buona parte a calcolo; da questa idea nasce la geometria analitica.
Il metodo algebrico si dimostrò molto potente per risolvere tanti problemi, per esempio l'intersezione tra due curve si riduce a un sistema di equazioni, l'interpolazione della curva per n punti si riduce ugualmente a un sistema di equazioni.
Molto più difficile si rivelò il problema di trovare l'equazione della tangente a una curva e ancor più quello di trovare un metodo generale per questo problema.
La tangente è la retta che *tocca* una curva in un solo punto senza attraversarla, o meglio è la retta che ha la stessa direzione (coefficiente angolare) della curva in un dato punto (la seconda definizione è preferibile perché comprende anche i punti di flesso).
Furono escogitati diversi metodi, tutti piuttosto macchinosi e laboriosi. I più generali furono quelli dell'inglese Barrow e del francese Sluse che diedero regole empiriche per trovare la tangente di una qualsiasi curva algebrica piana, della forma P(x,

y) = 0, dove P(x, y) è un polinomio nelle due variabili x e y.
I metodi di Barrow e Sluse implicavano già l'uso di quantità infinitamente piccole o *infinitesimi*. L'idea era che la tangente è quella retta che ha in comune con la curva due punti infinitamente vicini, tali cioè che la loro distanza sia infinitesima.
Come vedremo più avanti la soluzione più generale viene trovata da Leibniz che considera il coefficiente angolare *m* della tangente a una curva come il quoziente tra gli incrementi infinitesimi della *y* e della x, in simboli:

$$m=\frac{dy}{dx}$$

1.2 Il problema della velocità istantanea

L'altro grande problema che fu alla base del calcolo infinitesimale è quello della velocità istantanea.
Prendiamo come esempio la corsa dei 100 metri piani; un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di 100/10 = 10 m/sec (metri al secondo).
Ma questa è appunto una media; per definizione la velocità media di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo. In formule:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove appunto Δs sta per spazio percorso e Δt sta per tempo impiegato a percorrerlo.
In questo caso è: $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{100}{10}=10\,m/s$

In quei dieci secondi però l'atleta non ha corso sempre alla stessa velocità. Rappresentando la sua corsa in un grafico tempo-spazio ci si può fare un'idea dell'andamento della corsa. Nel disegno a lato sono rappresentati i moti di due atleti *A* (rosso) e *B* (verde). Vediamo che *A* è partito lentamente poi ha accelerato progressivamente fino al traguardo; *B* è partito più veloce e poi ha rallentato sempre più. Alla fine A e B sono arrivati a pari merito, dunque la loro velocità media risulta la stessa, mentre la velocità istantanea è diversa.

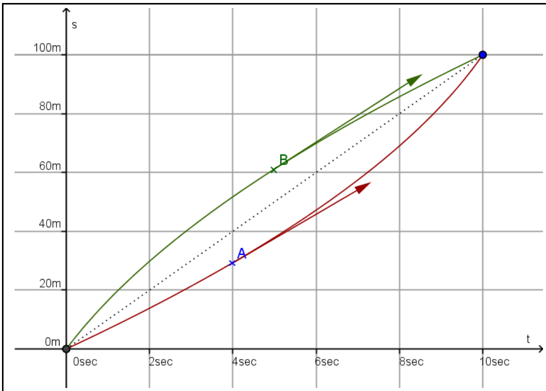
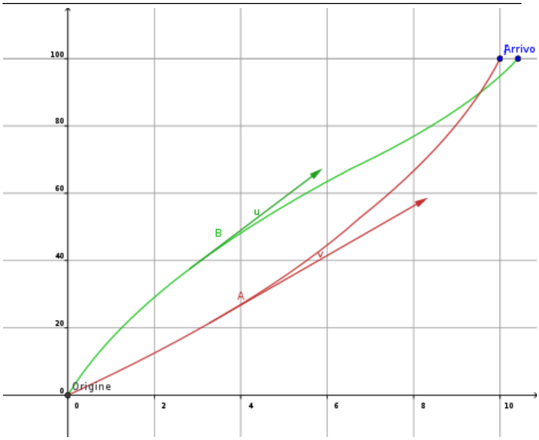


Grafico tempo spazio di una corsa dei 100 m piani; A e B sono i due atleti in gara.

Nel diagramma a lato una variante; qui B è partito a grande velocità, mentre A è partito più lento, ma alla fine A accelera e B rallenta e A arriva al traguardo per primo. Il punto di incrocio tra le due curve rappresenta ovviamente il momento del *sorpasso* di A su B; in quel momento A e B sono nella stessa posizione. A e B



Un altro esempio di gara dei 100 m piani.

hanno la stessa velocità solo verso metà gara quando le tangenti alle due curva sono parallele.
Il problema è: si può calcolare la velocità dell'atleta istante per istante? Che cosa vuol dire esattamente *istante*? Se ammettiamo che un istante corrisponda a un intervallo di tempo nullo, e quindi che in un tempo nullo sia stato percorso un tempo nullo, abbiamo $\Delta\tau = 0$ e $\Delta s = 0$ e quindi la velocità istantanea varrebbe $v = 0/0$ che è una frazione indeterminata e quindi indefinita; è la versione in termini moderni del 3° paradosso di Zenone, quello della freccia.
In altre parole il concetto di velocità istantanea sembra irrimediabilmente intrattabile.
Per superare questa situazione, Leibniz e, in modo equivalente, Newton introdussero il concetto di *infinitesimo*: l'istante di tempo è visto non più come un tempo nullo ma come un tempo infinitamente piccolo o *infinitesimo dt* (leggi *de-ti*) e analogamente lo spazio percorso come uno spazio infinitesimo *ds* (leggi *de-esse*). La velocità istantanea è allora data dal quoziente *ds/dt*, che si chiamerà *derivata* dello spazio rispetto al tempo.[11]

$$v=\frac{ds}{dt}$$

Questa soluzione può sembrare artificiosa ma fu sufficiente a costruire un nuovo tipo di calcolo, il calcolo infinitesimale, che ebbe uno straordinario successo fino a divenire strumento di lavoro fondamentale per fisici e ingegneri.
Un'altra soluzione possibile è quella di cercare di approssimare la velocità istantanea misurando la velocità media su intervalli di tempo sempre più piccoli.
Per esempio per misurare la velocità istantanea dell'atleta A al 50° metro, si potrebbe riprendere la corsa con una telecamera ad alta velocità e fare le seguenti misure sui fotogrammi prendendo intervalli di tempo sempre più brevi:

11 Newton usò termini e simboli diversi; per lui la variabile dipendente (qui la posizione indicata per esempio con $\boldsymbol{z}$) si chiama *fluente*, le derivata si chiama *flussione* e si indica con $\dot{\boldsymbol{z}}$