Matematicamente.it

Carlo Sintini

MATEMATICA ? ... NO PROBLEM !!!

Manuale ad uso degli studenti liceali con ripasso delle nozioni di base: geometria analitica nel piano e nello spazio, logaritmi, esponenziali, limiti, derivate, integrali, matrici, calcolo vettoriale

Carlo Sintini

Matematica ? … No problem !!!

Tutta la matematica di base
per i licei e il biennio universitario

Matematicamente

Carlo Sintini

Matematica ? … No problem !!!

www.matematicamente.it – libri@matematicamente.it

Stampa
Universal Book – via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)

ISBN 978 88 96354 08 7

A mio nipote Samuele

INDICE

INTRODUZIONE

Questo testo non ha alcuna pretesa di costituire un'esposizione rigorosa e completa degli argomenti trattati.
E' soltanto un manuale di rapida consultazione per studenti che, in alcuni punti, offre (forse) una spiegazione più chiara ed intuitiva rispetto a quella normalmente presente nei testi tradizionali.
Ho volutamente saltato molte dimostrazioni, preoccupandomi però in molte occasioni di fornire una giustificazione logica di quanto andavo affermando.
Come scelta consapevole (suggerita dalla mia esperienza di docente di un liceo scientifico), preferisco usare il rigore scientifico solo quando è necessario, ma non sempre.
Preferisco decisamente la semplicità e l'immediatezza ad un rigore formalmente ineccepibile a spese della chiarezza.
Lo scopo di questi appunti è quello di fornire un valido appoggio ai testi tradizionali presentando in modo sintetico e chiaro tutti i punti fondamentali e tradizionalmente più ostici per lo studente, insieme ad un repertorio abbastanza ampio di esempi svolti.

Carlo Sintini
c.sintini@libero.it

CAP. 1 - PREMESSE

Par. 1 - Proprietà delle potenze

In questo primo capitolo passiamo in rassegna alcuni concetti elementari che dovrebbero essere già noti, ma che spesso sono (almeno in parte) del tutto dimenticati.
Cominciamo con un ripasso sulle proprietà delle potenze.

1) $1^n = 1$
2) $a^0 = 1$ (tranne che per a = 0 perché in tal caso il risultato è indeterminato)
3) $(a\ b\ c)^n = a^n\ b^n\ c^n$ (Attenzione ! Gli elementi dentro parentesi devono essere tutti moltiplicati fra loro: non devono esserci segni di addizione)
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (Attenzione! Anche qui gli elementi dentro parentesi devono essere divisi fra loro: non devono esserci segni di sottrazione)
5) $a^m\ a^n = a^{m+n}$ (Attenzione! La regola non vale se al primo membro c'è $a^m + a^n$)
6) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (Attenzione! La regola non vale se al primo membro c'è $a^m - a^n$)
7) $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
8) $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$
9) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
10) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

Par. 2 - Proprietà dei radicali

Proseguiamo con le proprietà dei radicali:

1) $\sqrt[0]{a}$ = impossibile (con $a \neq 1$)

2) $\sqrt[0]{1}$ = indeterminato

3) $\sqrt[1]{a} = a$

4) $\sqrt[n]{a^n} = a$

5) $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m\cdot p]{a^{n\cdot p}}$ (Per esempio $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3\cdot 5]{a^{2\cdot 5}} = \sqrt[15]{a^{10}}$)

Applicando questa regola al contrario (Per esempio $\sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}$) si dice che si è **ridotto**, semplificato, il radicale.

6) $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^2} = a^{\frac{6}{3}}\sqrt[3]{b^2} = a^2\sqrt[3]{b^2}$

$\sqrt[3]{a^7 \cdot b^2} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^1 \cdot b^2} = a^{\frac{6}{3}}\sqrt[3]{a \cdot b^2} = a^2\sqrt[3]{a \cdot b^2}$

$\sqrt[3]{a^6 \pm b^2}$ (Attenzione ! Con i segni $\pm$ non è possibile portare fuori di radice la potenza)

7) $a^3\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a^{3\cdot 2} \cdot a \cdot b} = \sqrt{a^6 \cdot a \cdot b} = \sqrt{a^7 \cdot b}$

$a^3 \pm \sqrt{a \cdot b}$ (Attenzione ! Anche in questi casi i segni $\pm$ impediscono di portare la potenza sotto la radice)

8) Prodotto o rapporto fra radicali con lo stesso indice:

$\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{ab^2 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b^2} = a \cdot \sqrt[3]{b^2}$

$\sqrt[3]{ab^2} : \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}$

$\sqrt[3]{ab^2} \pm \sqrt[3]{a^2}$ (Attenzione! Al solito i segni $\pm$ impediscono l'unione delle radici)

Se i radicali sono moltiplicati o divisi fra loro ed hanno **indici differenti** fra loro, si debbono prima trasformare in modo che gli indici diventino uguali, e poi si procede come sopra. Per esempio:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[4]{a^3b}$$

Calcoliamo il m.c.m. dei tre indici (m.c.m.=12), e trasformiamo i tre radicali applicando la regola 5) in modo che assumano tutti lo stesso indice 12:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[4]{a^3b}=\sqrt[2\cdot6]{(a)^6}\cdot\sqrt[3\cdot4]{\left(ab^2\right)^4}\cdot\sqrt[4\cdot3]{\left(a^3b\right)^3}=$$

$$=\sqrt[12]{a^6}\cdot\sqrt[12]{a^4b^8}\cdot\sqrt[12]{a^9b^3}=\sqrt[12]{a^6\cdot a^4b^8\cdot a^9b^3}=$$

$$=\sqrt[12]{a^{19}\cdot b^{11}}=\sqrt[12]{a^{12}\cdot a^7\cdot b^{11}}=a\cdot\sqrt[12]{a^7\cdot b^{11}}$$

9)

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[4]{ab^2}}}=\sqrt[3\cdot2\cdot4]{ab^2}=\sqrt[24]{ab^2}$$

$$\sqrt[4]{a^3\sqrt[2]{b}}=\sqrt[4]{\sqrt[2]{a^{3\cdot2}b}}=\sqrt[4]{\sqrt[2]{a^6b}}=\sqrt[8]{a^6b}$$

$$\sqrt[3]{a\pm\sqrt[4]{b}}$$

(Ancora a causa dei segni ± non è possibile applicare la regola.)

Fa eccezione il caso, detto dei **radicali doppi**, in cui i due radicali abbiano entrambi indice 2, e la quantità a^2-b sia un quadrato perfetto.

In tale caso, ponendo $a^2-b=c^2$, si ha

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Par. 3 - I prodotti notevoli

Raggruppiamo in questo paragrafo sia i prodotti notevoli classici, che quei criteri che permettono di trasformare un polinomio in un prodotto di due o più fattori.

1) $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
2) $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$
3) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$
4) $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ (Attenzione! a^2+b^2 non è un prodotto notevole)
5) Il raccoglimento a fattor comune. Per esempio:
$15a^2b^3 + 5a^2b^2 - 20a^3b^5 = 5a^2b^2 (3b + 1 - 4ab^3)$
6) Il doppio raccoglimento a fattor comune. Per esempio:

$$3a^2 + ab - 2b^2 = 3a^2 + 3ab - 2ab - 2b^2 = 3a(a + b) - 2b(a + b) =$$
$$= (3a - 2b)(a + b)$$

7) Ogni trinomio di secondo grado ax^2+bx+c può essere scritto nella forma $a(x - x_1)(x - x_2)$ dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c = 0$.
8) La divisione con il metodo di Ruffini.
Dato per esempio il polinomio
$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ esso, vedi a fianco, si può scrivere nella forma
$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	=

Par. 4 - Varie

1) Razionalizzazione del denominatore di una frazione (procedimento per eliminare un radicale dal denominatore di una frazione). Ecco alcuni esempi fra i più comuni:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{3}{2\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2\cdot\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2\cdot\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2\cdot 2}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{4}$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-2}=\frac{2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{-1}=2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

2) Confronto fra due frazioni per stabilire quale delle due è più grande.
   Basta moltiplicare in croce (con le frecce verso l'alto): è più grande la frazione dalla cui parte si trova il risultato maggiore. Per esempio, fra le due frazioni sottostanti

$$\begin{array}{ccc} 18 & \qquad & 25 \\ \\ \dfrac{3}{5} & & \dfrac{5}{6} \end{array}$$

   e' più grande il prodotto 25 e quindi è più grande la seconda frazione.

3) Confronto fra due radicali. Si deve trasportare tutto sotto la radice e poi trasformare gli indici in modo che assumano lo stesso valore. Per esempio,
   I due radicali

$$3\sqrt{2} \qquad\qquad 2\sqrt[3]{7}$$

possono essere trasformati nel modo seguente:

$$3\sqrt{2} \qquad 2\sqrt[3]{7}$$

$$\sqrt{3^2 \cdot 2} \qquad \sqrt[3]{2^3 \cdot 7}$$

$$\sqrt{9 \cdot 2} \qquad \sqrt[3]{8 \cdot 7}$$

$$\sqrt{18} \qquad \sqrt[3]{56}$$

$$\sqrt[2\cdot 3]{18^3} \qquad \sqrt[3\cdot 2]{56^2}$$

$$\sqrt[6]{5832} \qquad \sqrt[6]{3136}$$

Da cui risulta che il primo radicale è più grande del secondo perché il primo radicando (il numero sotto radice), è maggiore.

Par. 5 – Le categorie numeriche

Ripercorriamo l'evoluzione del concetto di numero partendo da quelli che per primi furono ideati dall'uomo: i numeri **NATURALI** (o numeri interi)

… 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

che sono indicati simbolicamente con la lettera **N**.

Questi altri sono invece i numeri positivi e negativi (o numeri **RELATIVI**)

… -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 …

e sono indicati con la lettera **Z**.

Il segno più davanti ai numeri positivi è facoltativo ed in genere viene messo solo quando la sua mancanza può generare confusione. Lo zero è il solo numero a non avere segno: è unico.

Fra un numero intero (positivo o negativo) e il successivo possono essere inseriti infiniti altri numeri (i numeri decimali o con la virgola)

… -5 … -4 … -3 … -2 … -1 … 0 … 1 … 2 … 3 … 4 … 5 …

in questo caso i numeri si chiamano **RAZIONALI** e vengono indicati con la lettera **Q**.

Tutti i numeri razionali possono essere messi sotto la forma $\frac{m}{n}$ in cui m ed n sono entrambi numeri interi.

I **numeri periodici** appartengono alla categoria dei numeri razionali perché possono essere trasformati nella loro frazione generatrice.

Per esempio,

$$2{,}3333... = 2{,}\overline{3} = 2{,}(3) = \frac{7}{3}$$

$$2{,}13333... = 2{,}1\overline{3} = 2{,}1(3) = \frac{192}{90}$$

$$2{,}13131313... = 2{,}\overline{1}\overline{3} = 2{,}(13) = \frac{211}{99}$$

Il periodo (come mostrano il secondo e il terzo membro) può essere indicato sia con una sopra-linea che con una parentesi.

La frazione generatrice di un numero periodico si può ottenere applicando una semplice regola (che si insegna nelle scuole medie), e che non è necessario spiegare in questo contesto: con una calcolatrice tascabile è comunque possibile fare la controprova e verificare che le frazioni corrispondono proprio ai numeri periodici indicati.

E' importante notare che anche i numeri naturali e relativi possono essere considerati razionali perché è possibile metterli sotto la forma $\frac{m}{n}$.

Per esempio,

$$5=\frac{5}{1}$$

$$0=\frac{0}{1}$$

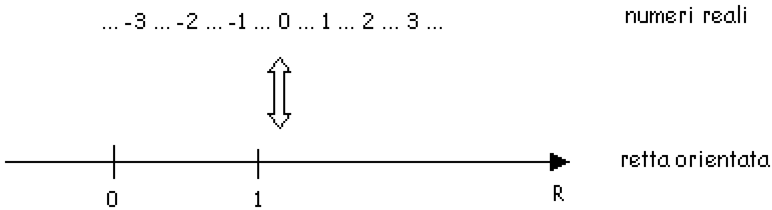
$$-4,2=-\frac{4,2}{1}=-\frac{42}{10}=-\frac{21}{5}$$

Esistono però altri numeri che non possono essere messi sotto la forma $\frac{m}{n}$ e per questa ragione sono detti **IRRAZIONALI**, e sono caratterizzati dal fatto che hanno **infinite cifre decimali non periodiche**.
Essi provengono da tutte le radici che non corrispondono a potenze esatte

$$\sqrt{2}\ =\ 1{,}412413... \qquad \sqrt[3]{7}\ =\ 1{,}213921... \quad \text{ecc}$$

dal rapporto di una circonferenza con il proprio raggio (il famoso pi greco $\pi=3{,}1415...$), dal calcolo di quasi tutte le funzioni trigonometriche (per esempio: cos 25° = 0,906307…), e si potrebbe seguitare con molti altri esempi.
I numeri razionali ed irrazionali costituiscono due insiemi separati, nel senso che un numero non può assolutamente appartenere ad entrambe le categorie: o può essere messo sotto la forma $\frac{m}{n}$ (ed allora è razionale), o non può essere messo sotto tale forma (ed allora è irrazionale).
L'insieme costituito dall'unione dei due insiemi, quello dei numeri RAZIONALI ed IRRAZIONALI costituisce una nuova categoria numerica che prende il nome di insieme dei **NUMERI REALI** e vengono indicati con la lettera **R**.

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza con i punti di una retta:



Ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta, e ad ogni punto della retta corrisponde un numero reale: si ha una **CORRISPONDENZA che funziona in entrambe le direzioni** (cioè biunivoca).
Se tentassimo invece di mettere a confronto i numeri N, Z, Q con una retta orientata, la corrispondenza funzionerebbe in una sola direzione. Cioè a ciascuno di questi numeri corrisponderebbe un punto sulla retta, ma ci sarebbero infiniti punti della retta ai quali non corrisponderebbe alcun numero.

N.B. A proposito dei numeri razionali nella forma $\frac{m}{n}$ occorre precisare che

$\frac{5}{0}$ = impossibile (nessun numero moltiplicato per 0 è uguale a 5)

$\frac{0}{0}$ = indeterminato (ogni numero moltiplicato per 0 è uguale a 0)

quindi **una frazione è nulla solo se il suo numeratore è nullo**.

Il discorso sulle categorie numeriche non è finito perché può avvenire che sotto una radice quadrata (o comunque con indice pari) ci sia un numero negativo, per esempio $\sqrt{-4}$.
Il risultato di queste radici può essere calcolato se si pone

$$i^2 = -1 \quad \text{cioè} \quad i = \sqrt{-1}.$$

In tal caso si può scrivere

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = i \cdot 2 = 2i$$

$$\sqrt{-13} = \sqrt{-1 \cdot 13} = \sqrt{-1}\sqrt{13} = i\sqrt{13}$$

I numeri di questo tipo prendono il nome di numeri **IMMAGINARI**.
Questi numeri ovviamente non possono essere rappresentati sulla retta orientata dei numeri reali.

A questo punto è possibile creare una nuova categoria numerica detta dei **NUMERI COMPLESSI**.
Un numero complesso è formato da due parti unite da un segno più o meno: la prima parte è un numero reale, la seconda parte è un numero complesso (il segno più o meno è solo simbolico perché non è possibile calcolare un risultato di una simile somma algebrica).
Per esempio:

$3+2i$ la parte reale è il numero 3, la parte immaginaria 2i

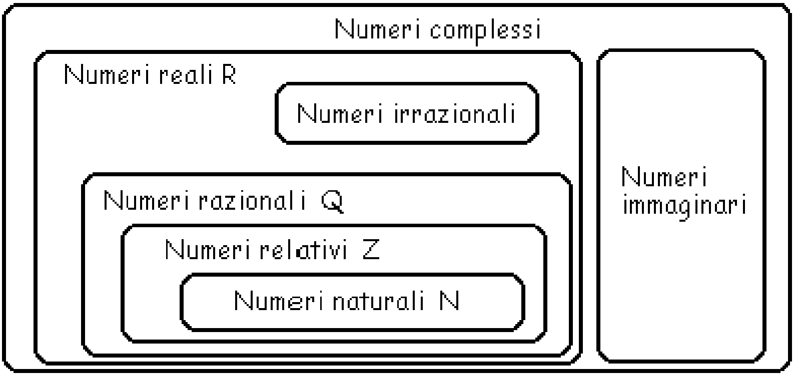
$5-4i$ la parte reale è il numero 5, la parte immaginaria -4i

7 la parte reale è il numero 7, la parte immaginaria nulla

$3i$ la parte reale è nulla, la parte immaginaria 3i

In questo modo ogni numero può essere considerato come un numero complesso.
Due numeri complessi con la stessa parte reale e con parte immaginaria uguale e di segno opposto, vengono detti **COMPLESSI CONIUGATI** fra loro.

Concludiamo osservando che ogni categoria numerica comprende le precedenti come un sottoinsieme



Cioè i numeri naturali sono un sottoinsieme di quelli relativi, quelli relativi sono un sottoinsieme di quelli razionali, e così via.

Par. 6 - Gli intervalli

I numeri reali possono quindi essere messi in corrispondenza con i punti di una retta orientata. Accade spesso di dover prendere in considerazione tutti i numeri (o tutti i punti) compresi fra due valori: si ottiene così un **intervallo**.
I punti estremi di questo intervallo possono essere compresi o esclusi dall'intervallo stesso, ed inoltre uno degli estremi può coincidere con il punto all'infinito (a destra o a sinistra).
Chiariamo questo concetto con degli esempi. Siano dati due numeri reali arbitrari che denominiamo simbolicamente con le lettere **a** e **b**