Matematicamente.it

Luca Lussardi

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA

Luca Lussardi

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA

Esercizi svolti di analisi matematica per le facoltà ad indirizzo scientifico

WWW.MATEMATICAMENTE.IT

Luca Lussardi

Esercizi di Analisi Matematica

www.matematicamente.it – libri@matematicamente.it

Stampa
Universal Book – via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)

ISBN 978 88 96354 19 3

Indice

Introduzione

La presente raccolta di esercizi di calcolo infinitesimale per funzioni di una variabile reale è frutto di tanti anni di esercitazioni di corsi di Analisi Matematica da me tenuti presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Pavia e del Politecnico di Milano: si tratta quindi di esercizi che possono tornare utili soprattutto agli studenti di Ingegneria che stanno preparando il primo esame di Analisi Matematica del loro ciclo di studi. La presente opera non ha alcuna pretesa di completezza, in quanto sono stati trattati solo alcuni degli argomenti classicamente presenti in un tradizionale corso di calcolo del primo anno. In particolare, in ogni capitolo vi sono dei brevi richiami di teoria, privi di ogni dimostrazione: tali richiami di teoria **non devono in nessun caso** fornire un'alternativa allo studio completo della teoria; essi hanno semplicemente lo scopo di dare un riferimento teorico rapido per una lettura più scorrevole degli esercizi. Il testo è accompagnato dalle tracce audio di spiegazione di ciascun esercizio, a volte più dettagliata di quanto si trova scritto lungo il testo.

Il file con 101 commenti audio di tutti gli esercizi proposti è scaricabile alla seguente URL:

www.matematicamente.it/lussardi/esercizidianalisi.zip

Ci auguriamo che questo supporto maggiore che il testo offre possa aiutare ancora di più lo studente.

Infine, i doverosi ringraziamenti. Un ringraziamento particolare va al prof. Marco Luigi Bernardi, che mi ha fornito, durante gli anni passati a Pavia, gran parte del materiale che si trova in queste note. Ringrazio inoltre l'editore Antonio Bernardo per l'interesse da sempre dimostrato verso la pubblicazione di questo eserciziario, con la speranza che possa essere utile a tanti studenti.

Brescia, Dicembre 2011

Luca Lussardi

Capitolo 1

L'insieme $\mathbb{R}$

1.1 Nozioni di base sugli insiemi

Per *insieme* si intende una collezione, un raggruppamento di elementi, considerati nella loro totalità. Se un elemento x appartiene all'insieme X si scrive anche

$$x \in X.$$

Se invece x non appartiene ad X, la notazione usata è

$$x \notin X.$$

Spesso risulta comodo denotare un insieme elencando i suoi elementi (specie per gli insiemi finiti), ad esempio $X = \{a, b, c\}$ è l'insieme che ha come elementi le lettere a, b e c. Nel seguito verrà utilizzato il simbolo $\emptyset$ per indicare l'*insieme vuoto*, ovvero l'insieme che non ha elementi.

Dato un insieme X si dice che Y è un *sottoinsieme* di X se risulta vera l'implicazione

$$x \in Y \Longrightarrow x \in X.$$

In tal caso si scrive

$$Y \subseteq X.$$

La nozione di sottoinsieme permette di enunciare una condizione necessaria e sufficiente per l'uguaglianza tra due insiemi, detta *principio di estensionalità*:

$$X = Y \Longleftrightarrow X \subseteq Y \,\mathrm{e}\, Y \subseteq X.$$

Dati due insiemi X e Y sia

$$X \cup Y := \{x : x \in X \,\text{oppure}\, x \in Y\}.$$

Si dice che $X \cup Y$ è l'*unione* tra X ed Y. Un'altra operazione di notevole interesse è l'*intersezione* tra insiemi: dati due insiemi X ed Y sia

$$X \cap Y := \{x : x \in X \,\mathrm{e}\, x \in Y\}.$$

Si dice che $X \cap Y$ è l'intersezione tra X ed Y. È possibile considerare anche la *differenza* tra due insiemi: dati due insiemi X e Y con $X \subseteq Y$, sia

$$Y \setminus X := \{x \in Y : x \notin X\}.$$

Si dice che $Y \setminus X$ è la differenza tra X e Y. Talvolta l'insieme $Y \setminus X$ si dice anche *complementare* di X in Y, e viene anche superiormente limitato e si ha $M = 6$ che risulta essere anche massimo di E. Si osservi che in questo caso il massimo è un punto isolato per E.

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Richiami di teoria

Una *funzione* f viene definita, in modo intuitivo, come una legge che associa ad ogni elemento di un insieme A, detto *dominio* un unico elemento di un insieme B, detto *codominio*. In simboli si scrive anche

$$f\colon A \to B$$

ed $y = f(x)$ per denotare che f associa a $x \in A$ l'unico elemento $y = f(x) \in B$. Una funzione quindi si ottiene assegnando dominio, codominio, e dicendo come opera la funzione stessa.

Sia $a \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ e sia $A = (-a, a)$. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è *pari* se

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in A.$$

Si dice che invece che f è *dispari* se

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in A.$$

ESEMPIO: Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$; allora dal momento che $x^2 = (-x)^2$, si ha che f è pari. Sia $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = x^3$; allora dal momento che $x^3 = -(-x)^3$, si ha che f è dispari.

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è *periodica* se esiste $T > 0$ tale che

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il *periodo* di f è definito come

$$\inf\{T > 0 : f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

ESEMPIO: Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sin x$; allora dal momento che $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che f è periodica; inoltre si ha proprio

$$\inf\{T > 0 : \sin(x+T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}\} = 2\pi.$$

Spesso è utile cosiderare anche l'insieme *immagine* della funzione definito come

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

ovvero il sottoinsieme di B degli elementi raggiunti da f.

Una funzione $f\colon A \to B$ si dice *iniettiva* o *invertibile* se

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Ne segue che risulta ben definita la funzione che *torna indietro*, ovvero la funzione $f^{-1}\colon \mathrm{Im}(f) \to A$ che opera come segue:

$$x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x).$$

La funzione f^{-1} viene anche detta *funzione inversa* di f.

Esempio: La funzione $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data da $f(n) = n + 1$ è invertibile; infatti si ha che da $n+1 = m+1$ discende $n = m$. Esiste quindi la funzione $f^{-1}\colon \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ che opera come segue: $f^{-1}(m) = m - 1$.

Una funzione $f\colon A \to B$ viene detta *suriettiva* se

$$\mathrm{Im}(f) = B.$$

Esempio: La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che opera come $f(z) = z+5$ è una funzione suriettiva, dal momento che per ogni $w \in \mathbb{Z}$ esiste $z = w - 5 \in \mathbb{Z}$ e si ha $f(z) = w$.

Siano date due funzioni $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to D$ con la condizione $\mathrm{Im}(f) \subseteq C$; allora si definisce una nuova funzione detta *composizione* tra f e g data da

$$g \circ f\colon A \to D$$

che opera nel seguente modo:

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$

mentre si dice che una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ è *strettamente decrescente* se per ogni $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Esempio: Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione data da $f(x) = x^3$. Allora dal momento che se $x_1 < x_2$ si ha $x_1^3 < x_2^3$, ne segue che f è una funzione strettamente crescente. Invece la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = x^2$ risulta strettamente crescente se $x \geq 0$, e risulta strettamente decrescente se $x \leq 0$.

Sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione, con $E \subseteq \mathbb{R}$. Se l'insieme $\mathrm{Im}(f)$ ha massimo M si dice anche che M è il *massimo assoluto* della funzione f sull'insieme E; analogamente se l'insieme $\mathrm{Im}(f)$ ha minimo m si dice anche che m è il *minimo assoluto* della funzione f sull'insieme E. Più in generale, se $\mathrm{Im}(f)$ è inferiormente limitato si dice che f è *inferiormente limitata*, mentre se $\mathrm{Im}(f)$ è superiormente limitato si dice che f è *superiormente limitata*. Se infine $\mathrm{Im}(f)$ è limitato si dice che f è *limitata*. Si usa la notazione

$$\inf_E f, \quad \sup_E f$$

per denotare, rispettivamente, l'estremo inferiore di $\mathrm{Im}(f)$ e l'estremo superiore di $\mathrm{Im}(f)$.

Esempio: Si data la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sqrt{x}$. Allora f è strettamente crescente e ammette minimo assoluto nel punto $x = 0$, dove vale 0, mentre ammette massimo assoluto nel punto $x = 1$ dove vale 1.

2.2 Esercizi

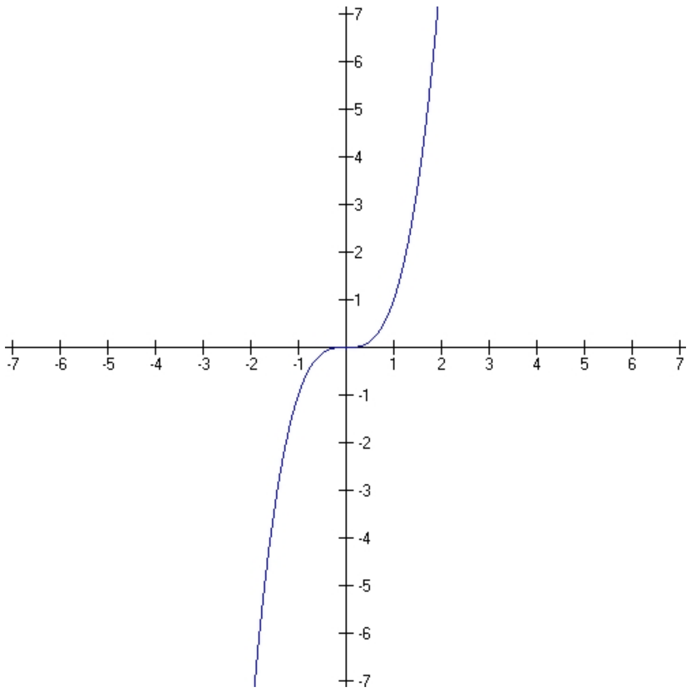
Esercizio 1

Es1cap2 Costruire il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

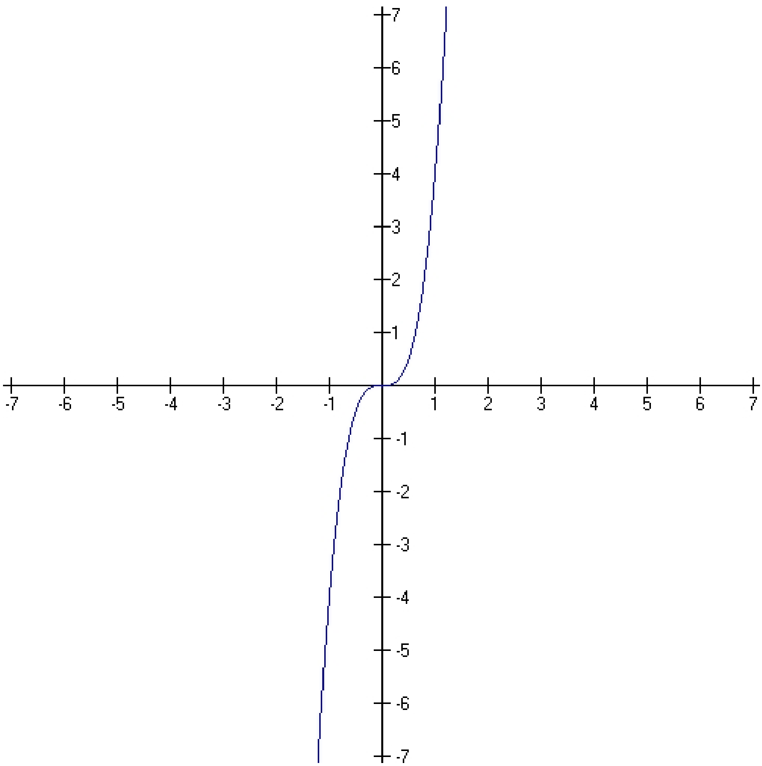
$$f(x) = 4x^3 + 1.$$

SOLUZIONE

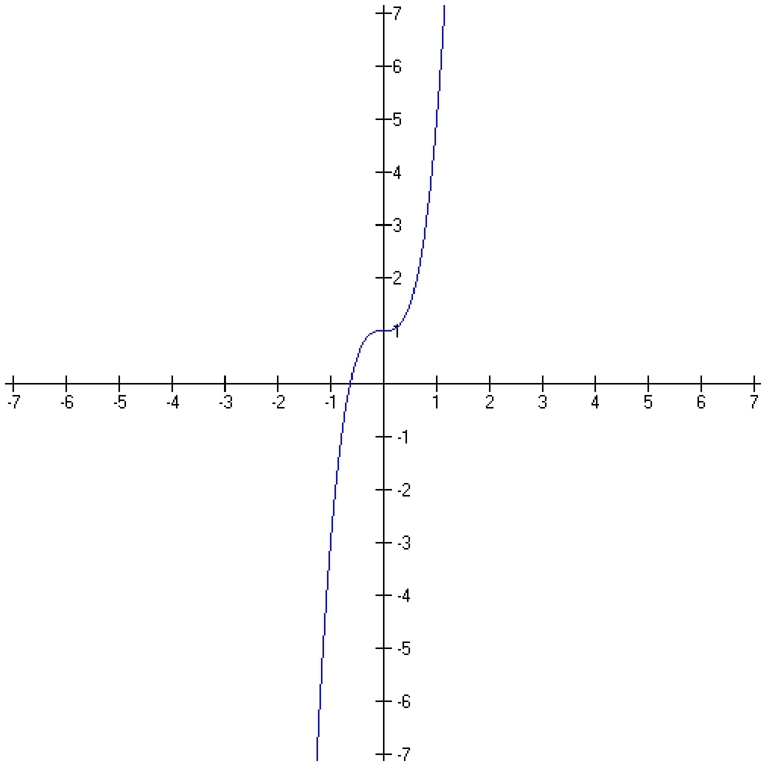
Costruiamo il grafico di f partendo dal noto grafico della funzione $y = x^3$, e dato da



Il fattore 4 davanti a x^3 produce una dilatazione avvicinando il grafico all'asse delle y. Si ottiene quindi il grafico della funzione $f(x) = 4x^3$ dato da



Infine, il termine $+1$ corrisponde ad una traslazione verso l'alto di 1 sull'asse delle y. Il grafico della funzione $f(x) = 4x^3 + 1$ sarà quindi dato da



Esercizio 2

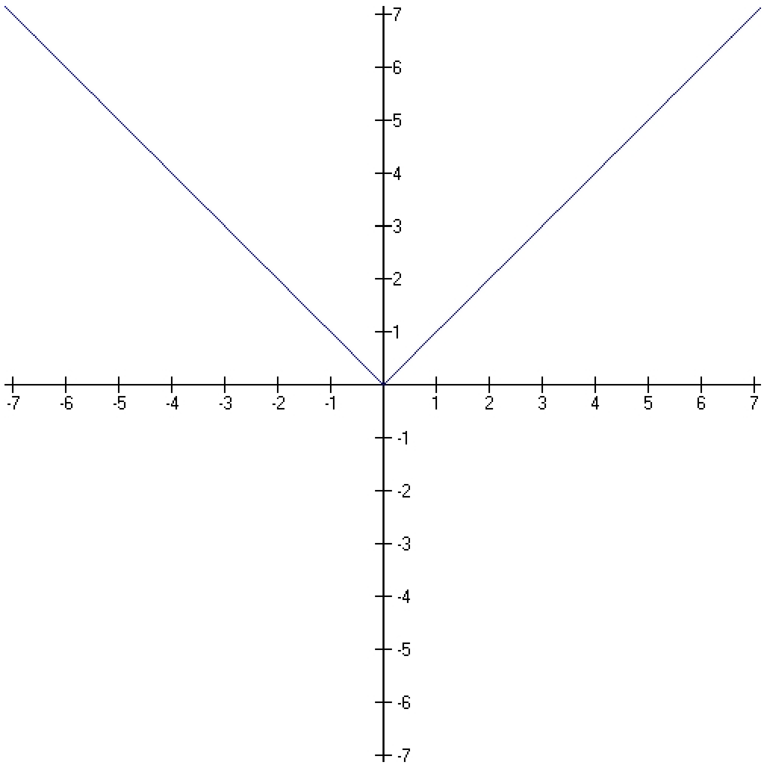
Es2cap2

Costruire il grafico della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = 3 - |x|.$$

SOLUZIONE

Costruiamo il grafico partendo dal noto grafico della funzione $y = |x|$, e dato da



Moltiplicando ora per -1 si ottiene un grafico di $y = -|x|$, che risulta essere il simmetrico rispetto al precedente, rispetto all'asse delle x, ovvero dato dal seguente

Esercizio 19

Es19cap2

Studiare limitatezza, superiore ed inferiore, monotonia, parità e periodicità della funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \arctan(-2x^3) - 2|x|x^3.$$

SOLUZIONE

La funzione f non è limitata a causa del termine $|x|x^3$, che rende f né inferiormente né superiormente limitata; f è una funzione dispari, infatti

$$f(-x) = \arctan(2x^3) + 2|x|x^3$$

$$= -(\arctan(-2x^3) - 2|x|x^3) = -f(x).$$

Infine, f non è pari e non è periodica.

Capitolo 3

Limiti e continuità

3.1 Richiami di teoria

3.1.1 Limiti

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f\colon E \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ di accumulazione per E. Si dice che $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è *limite* di f per x che tende ad x_0 se per ogni intorno I di ℓ esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in J \cap (E \setminus \{x_0\})$ si ha $f(x) \in I$. In tal caso si scrive anche

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Si pone anche, quando la cosa ha senso,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \geq x_0}} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \leq x_0}} f(x).$$

Segue che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Unicità del limite: Il limite, se esiste, è unico.

La definizione si può riscrivere caso per caso, in modo più utile per le applicazioni.

1) $x_0, \ell \in \mathbb{R}$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$, con $x \neq x_0$, si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

2) $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$, con $x \neq x_0$, si ha $f(x) > M$.

3) $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell = -\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$, con $x \neq x_0$, si ha $f(x) < -M$.

4) $x_0 = +\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in (M, +\infty) \cap E$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

5) $x_0 = -\infty$, $\ell \in \mathbb{R}$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M < 0$ tale che per ogni $x \in (-\infty, M) \cap E$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

6) $x_0 = +\infty$, $\ell = +\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (\delta, +\infty) \cap E$ si ha $f(x) > M$.

7) $x_0 = +\infty$, $\ell = -\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (\delta, +\infty) \cap E$ si ha $f(x) < -M$.

8) $x_0 = -\infty$, $\ell = +\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $\delta < 0$ tale che per ogni $x \in (-\infty, \delta) \cap E$ si ha $f(x) > M$.

9) $x_0 = -\infty$, $\ell = -\infty$: per ogni $M > 0$ esiste $\delta < 0$ tale che per ogni $x \in (-\infty, \delta) \cap E$ si ha $f(x) < -M$.

Esempio: Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defінta come $f(x) = x^2$. Allora si ha che
$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$
Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta := \sqrt{\varepsilon}$. Allora per ogni $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$, si ha
$$|f(x)| = x^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Esempio: Sia data la funzione $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = \frac{1}{x}$. Allora
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$
Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta := 1/\varepsilon$. Allora per ogni $x > \delta$ si ha
$$|f(x)| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} < \varepsilon.$$

Esempio: Sia data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = \sin x$. Allora non esiste
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x).$$
La stessa cosa vale per ogni funzione periodica non costante.

Elenchiamo le più comuni regole di calcolo dei limiti: in quanto segue si pone, per definizione,
$$+\infty + a := +\infty, \quad -\infty + a := \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R},$$
$$\pm\infty \pm \infty = \pm\infty,$$

$$+\infty \cdot a := +\infty, \quad +\infty \cdot a := +\infty, \quad \forall a > 0,$$

$$+\infty \cdot a := -\infty, \quad -\infty \cdot a := +\infty, \quad \forall a < 0,$$

$$\pm\infty \cdot (\pm\infty) := +\infty, \quad \pm\infty \cdot (\mp\infty) := -\infty.$$

Se $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e sono tali per cui $\ell_1 \pm \ell_2$ e $\ell_1 \cdot \ell_2$ rientrano nei casi di cui sopra, e

$$\ell_1 := \lim_{x \to x_0} f(x), \quad \ell_2 := \lim_{x \to x_0} g(x)$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2, \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2.$$

Le forme che invece richiedono esami ulteriori sono dette anche *forme indeterminate* e sono date da (∞ senza segno significa che si ha la forma indeterminata per ogni scelta del segno di ∞):

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \pm\infty \mp \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Vi sono alcuni limiti, detti *notevoli*, che spesso semplificano il calcolo di limiti più complicati. Nel seguito sono illustrati alcuni dei più importanti limiti notevoli.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \to \pm\infty} x^{n-m}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad a > 0,\, a \neq 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a, \quad a > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

Teorema del confronto per i limiti: Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, siano $f, g, h \colon E \to \mathbb{R}$ e sia x_0 di accumulazione per E. Se

$$f \leq g \leq h$$

e

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0} h(x)$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell.$$

3.1.2 Funzioni continue

Una funzione $f \colon E \to \mathbb{R}$, dove $E \subseteq \mathbb{R}$, si dice *continua* in $x_0 \in E$ se per ogni intorno I di $f(x_0)$ esiste un intorno J di x_0 tale che per ogni $x \in J \cap E$ si ha $f(x) \in I$. Equivalentemente, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$

si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Se x_0 è di accumulazione per E ciò equivale a richiedere che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

PROPOSIZIONE: Siano $f, g \colon E \to \mathbb{R}$ continue. Allora

$$f + g, \quad f - g, \quad fg$$

sono continue. Se $g \neq 0$ allora

$$\frac{f}{g}$$

è continua. Se $f \geq 0$ allora $\sqrt{f}$ è continua. La composizione di funzioni continue inoltre è ancora una funzione continua. Le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

ESEMPIO: Sia data la funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x + 4} + x^6.$$

Allora, dal momento che f risulta continua in $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{5}{4}.$$

CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA: Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Allora, la funzione

$$f^{-1} \colon \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$$

è continua.

Teorema degli zeri: Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, una funzione continua, tale per cui si abbia $f(a)f(b) \leq 0$; allora esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = 0$.

Osservazione: Il teorema degli zeri sotto certe condizioni garantisce l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, ma non afferma nulla a proposito della sua unicità; del resto è facile fare esempi di funzioni per le quali non si ha unicità della soluzione: ogni funzione che sia identicamente nulla su un sottointervallo dell'intervallo $[a,b]$ considerato verifica le ipotesi del teorema degli zeri ma non ammette un'unica intersezione con l'asse delle x. Le ipotesi per la validità del teorema degli zeri sono necessarie: ad esempio la funzione costante $f(x) = 1$ definita su un intervallo limitato $[a,b]$ non verifica la condizione $f(a)f(b) \leq 0$, ed invero non ha intersezioni con l'asse x. Invece la funzione $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = -1$ se $x \in [-1,0]$ e $f(x) = 1$ se $x \in (0,1]$, non è continua, ed invero non ha intersezioni con l'asse delle x.

Teorema dei valori intermedi: Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\mathrm{Im}(f)$ è un intervallo.

Il teorema dei valori intermedi afferma, in altre parole, che una funzione continua $f\colon I \to \mathbb{R}$ assume tutti i valori compresi tra $\inf f$ e $\sup f$, eventualmente estremi inclusi.

Teorema di Weierstrass: Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora f ha massimo e minimo assoluti.

Osservazione: Le ipotesi date non possono essere indebolite. Ad esempio rimuovendo la chiusura dell'intervallo si ottiene un teorema falso: la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita su $(0, 1]$ è continua ma non ammette massimo assoluto. Ancora la rimozione della continuità rende falsa la tesi: la funzione $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \in (0, 1]$ è definita su $[0, 1]$, non è continua e non ha massimo assoluto.

3.2 Esercizi

Es1cap3

Esercizio 1
Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos(4x)}{x^2}+\frac{3x^2-1}{1-6x^2}\right).$$

SOLUZIONE
Dal momento che la funzione $y=\cos(4x)$ è limitata e siccome

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(4x)}{x^2}=0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{1-6x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-6\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-6}=-\frac{1}{2}$$

da cui si trova

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos(4x)}{x^2}+\frac{3x^2-1}{1-6x^2}\right)=-\frac{1}{2}.$$


Es2cap3

Esercizio 2

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x^2}-1}{x\sin x}.$$

SOLUZIONE

Osserviamo che si ha

$$\frac{e^{7x^2}-1}{x\sin x}=7\frac{e^{7x^2}-1}{7x^2}\frac{x}{\sin x}.$$

Posto $y=7x^2$ abbiamo che $y\to 0$ se $x\to 0$; inoltre

$$\frac{e^{7x^2}-1}{7x^2}=\frac{e^y-1}{y}$$

che ha limite 1 quando $y\to 0$, per uno dei limiti notevoli. Dal momento che si ha anche

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

per un altro dei limiti notevoli, si ha quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x^2}-1}{x\sin x}=7.$$

Esercizio 3

Es3cap3

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(5x)}{x}-4e^{\frac{1}{x}}\right).$$

SOLUZIONE

Essendo $y=\sin(5x)$ una funzione limitata e avendosi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

si ha che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(5x)}{x}=0.$$

Per quanto riguarda

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}$$

osserviamo che per continuità della funzione $y=e^x$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

Dunque si conclude che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(5x)}{x}-4e^{\frac{1}{x}}\right)=-4.$$

Es4cap3

ESERCIZIO 4
Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan(2x^2)}{x^2}+\cos(2x+\pi)+6x^{-3}\log(1+6x^3)\right).$$

SOLUZIONE
Anzitutto si ha

$$\frac{\arctan(2x^2)}{x^2}+\cos(2x+\pi)+6x^{-3}\log(1+6x^3)$$

$$=2\frac{\arctan(2x^2)}{2x^2}+\cos(2x+\pi)+36\frac{\log(1+6x^3)}{6x^3}.$$

Posto $y=2x^2$ si ha che $y\to 0$ se $x\to 0$ e inoltre

$$\frac{\arctan(2x^2)}{2x^2}=\frac{\arctan y}{y}$$

che tende a 1 per $y\to 0$, per uno dei limiti notevoli. Ne segue che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(2x^2)}{2x^2}=1.$$

Per continuità della funzione $y=\cos x$ si ha

$$\lim_{x\to 0}\cos(2x+\pi)=\cos\pi=-1.$$

Infine, posto $y=6x^3$ si ha $y\to 0$ per $x\to 0$ e

$$\frac{\log(1+6x^3)}{6x^3}=\frac{\log(1+y)}{y}$$

che tende a 1 se $y \to 0$, per uno dei limiti notevoli. Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+6x^3)}{6x^3} = 1.$$

Riassumendo abbiamo trovato che

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arctan(2x^2)}{x^2} + \cos(2x+\pi) + 6x^{-3}\log(1+6x^3) \right) = 37.$$