Matematicamente.it

Arrigo Amadori

IL VIAGGIO PERFETTO

Come diventare esploratori di superfici

Arrigo Amadori

Il viaggio perfetto

Come diventare esploratori di superfici

Matematicamente

EDITING
ANTONIO BERNARDO

Corso Umberto 27c
73010 San Donato di Lecce
Tel.fax 0832 657445
www.matematicamente.it
libri@matematicamente.it

Stampa
Universal book
Via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)
Tel. Fax 0984 408929

ISBN: 978 88 963 5407 0

Indice

Presentazione

Questo libro rappresenta un giusto compromesso tra chi desidera apprendere le basi della geometria differenziale della superficie nello spazio ordinario, e invece chi cerca qualche spunto per eventuali approfondimenti successivi. Infatti, la trattazione dei fondamenti della teoria della superficie è presentata in modo non eccessivamente tecnico e formale, corredato da molte figure e dando ampio spazio all'intuizione, ma senza trascurare i passaggi matematici più delicati, che necessiterebbero di approfondimenti ulteriori, ma che devierebbero troppo dal percorso proposto.

Dopo una breve introduzione alla teoria delle curve differenziabili nello spazio ordinario, l'autore introduce in modo semplice e intuitivo le superfici parametrizzate e presenta subito la questione più delicata e feconda, ovvero la nozione di metrica indotta dallo spazio ordinario sulla superficie. Passa quindi allo studio delle linee geodetiche, per le quali offre, in modo intuitivo ma ricco di spunti, parecchi aspetti di notevole interesse e ben collegati con altre parti della matematica moderna, in particolare il Calcolo delle Variazioni. Infine è d'obbligo la teoria della curvatura, anch'essa presentata in modo semplice, chiaro e a

partire dalle vecchie ma brillanti idee di Gauss e Riemann.
Il testo risulta adatto a tutti coloro che hanno una buona conoscenza dell'Algebra lineare e dell'Analisi matematica in dimensione finita, per esempio studenti dei primi anni delle facoltà di Scienze o di Ingegneria.

Dortmund (Germania)
Luglio 2010

Luca Lussardi

Prefazione

La geometria differenziale delle ordinarie superfici di $\mathbb{R}^3$ è una branca della matematica estremamente bella e stimolante. Essa conduce naturalmente, se generalizzata ad n dimensioni, alla geometria riemanniana ed al connesso calcolo tensoriale. Queste ultime costituiscono la base matematica della teoria della relatività generale, universalmente considerata la più bella teoria fisica, fra le più alte vette del pensiero umano di tutti tempi.

Questa doppia valenza, matematica e fisica, secondo me, rende la geometria differenziale ancora più interessante ed affascinante.

In queste pagine, mi propongo di introdurre il lettore in questo mondo stupendo facendogli vivere la stessa "emozione" di un "esploratore" che entra in una terra sconosciuta. In cambio, come prerequisito, è richiesta una buona conoscenza della matematica di base, almeno a livello di biennio universitario di matematica, fisica, ingegneria o simili.

Lo stile è descrittivo/intuitivo. Il formalismo è snello e pratico. Non mi dilungo in inutili tecnicismi matematici, né utilizzo un linguaggio ampolloso e pedante, ben sapendo però che ciò è a scapito del rigore formale matematico. Dovendo scegliere – fra rigore e pragmatismo - ho preferito l'approccio pragmatico, avendo io la *forma mentis* di un fisico. Darò, quindi (a parte doverosi approfondimenti), per scontate tutte le condizioni di regolarità delle situazioni e delle funzioni in gioco, cioè darò per scontato che le cose "siano tali da funzionare correttamente".

Infine, desidero ringraziare Antonella Valzania, segretaria del Circolo Matematico Cesenate, per la correzione delle bozze.

Cesena, dicembre 2009

Arrigo Amadori

Introduzione

L'aggettivo "differenziale" che si aggiunge alla parola geometria sta ad indicare che in quella teoria matematica si applicano alla geometria (essenzialmente riguardante punti dello spazio) i concetti e i metodi del calcolo differenziale. Tale calcolo si basa sul concetto di derivata, di differenziale e di vettore tangente. In sintesi, si può dire che in geometria differenziale si "esplorano" le figure (geometriche) per mezzo dei vettori tangenti, perché con tali vettori, ogni linea o superficie curva può essere, almeno localmente, linearizzata, cioè considerata piana.

Le superfici sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ a due dimensioni che, per semplicità e convenienza, vogliamo siano lisce, regolari, cioè prive di punti aguzzi, spigoli vivi, spiegazzamenti, lacerazioni ecc. L'esigenza di regolarità è ovvia.

Le superfici sono insiemi di punti immersi in $\mathbb{R}^3$. Per questo dobbiamo conoscere bene le proprietà di questo spazio, che è lo spazio vettoriale reale tridimensionale.

I punti (vettori) di $\mathbb{R}^3$ sono le triple ordinate:

$$a=(a_{1,}a_{2,}a_3)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \tag{0.1}$$

rappresentabili come vettori riga o colonna, con $a_{1,}a_{2,}a_3 \in \mathbb{R}$

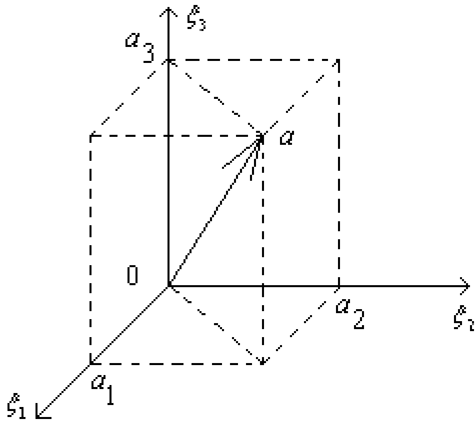

Figura 0.1

La base ortonormale canonica di $\mathbb{R}^3$ è $\{e_{1,}e_{2,}e_3\}$, dove:

$$\begin{aligned}e_1&=(1,0,0)\\e_2&=(0,1,0)\\e_3&=(0,0,1)\end{aligned} \tag{0.2}$$

Per i vettori della base ortonormale vale la condizione:

$$\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{i,j} \tag{0.3}$$

dove $\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases}, \quad con \quad i, j=1,2,3$ è la delta di Kronecker.

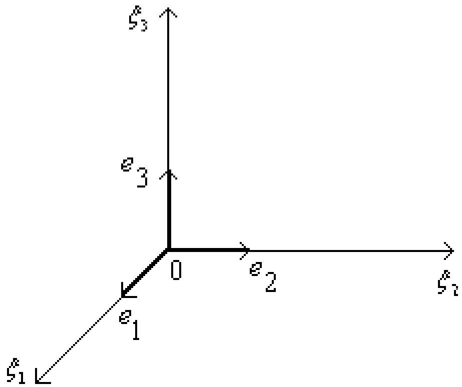

Figura 0.2

Per i vettori di $\mathbb{R}^3$ sono definite le seguenti operazioni:

$$a \pm b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm a_3 \end{pmatrix} \text{ addizione e sottrazione}$$

$$k\,a = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\,a_1 \\ k\,a_2 \\ k\,a_3 \end{pmatrix} \text{ moltiplicazione per uno scalare} (k \in \mathbb{R})$$

$$\langle a\,, b \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{ prodotto interno o scalare}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} \text{ prodotto vettoriale}$$

(0.4)

Il prodotto interno può essere indicato anche con $a \cdot b$ ed il prodotto vettoriale con $a \wedge b$.

Lo spazio $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto interno $\langle a , b \rangle$ definito sopra, è detto spazio euclideo tridimensionale reale.
Il prodotto interno induce in $\mathbb{R}^3$ la norma:

$$\|a\|=\sqrt{\langle a , a \rangle}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{5}$$

e la distanza:

$$d(a , b)=\|a-b\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2} \tag{6}$$

La distanza d induce in $\mathbb{R}^3$ la topologia naturale in cui gli intorni sono le sfere aperte:

$$S(a , r)=\{b ; b \in \mathbb{R}^3 , d(a , b)<r\} \tag{7}$$

centrate i ogni punto a di $\mathbb{R}^3$ ed aventi raggi $r>0$.

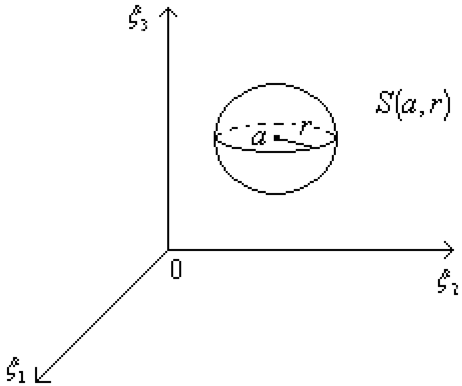

Figura 0.3

Abbiamo così definito tutte le proprietà di $\mathbb{R}^3$ che dovremo usare.

1. Le curve

Prima di iniziare a parlare di superfici, occorre introdurre le curve, le linee di $\mathbb{R}^3$, che sono oggetti ad una dimensione (e che, come sempre, consideriamo lisce, regolari, ecc.). Su di esse definiremo il concetto di vettore tangente, di lunghezza e di curvatura e lo faremo in modo sintetico e rapido, trattandosi di concetti molto evidenti.

Una curva α di $\mathbb{R}^3$ è descrivibile da una data parametrizzazione, cioè da una funzione vettoriale $\alpha:(t_1, t_2)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ ((t_1, t_2) è un intervallo aperto) (l'uso di una stessa lettera per indicare la curva e la sua parametrizzazione non crea ambiguità).

Possiamo indicare una parametrizzazione di una curva con le scritture:

$$\alpha(t) \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \xi_1=\xi_1(t) \\ \xi_2=\xi_2(t) \\ \xi_3=\xi_3(t) \end{cases} \qquad (1.1)$$

(dove $t\in(t_1, t_2)\subseteq\mathbb{R}, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\in\mathbb{R}^3$) o con altre convenienti