

Sergio Balsimelli

La geometria con Geogebra

Esercizi per la scuola secondaria
di primo grado

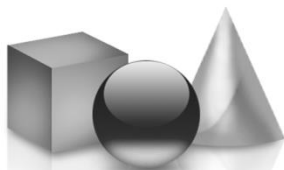


SERGIO BALSIMELLI

LA GEOMETRIA CON GEOGEBRA

(seconda edizione)

*Esercizi per la scuola
secondaria di primo grado
e di secondo grado*



Matematicamente

EDITING

NICOLA CHIRIANO

© 2010 Matematicamente.it
Corso Umberto 27c
73010 San Donato di Lecce
www.matematicamente.it
libri@matematicamente.it

Stampa
Universal Book
Via Botticelli, 22 -87036 Rende (CS)
Tel. Fax 0984 408929

ISBN: 978 88 96354 06 3

Indice

Introduzione	6
La barra degli strumenti di disegno	8
La barra di inserimento	15
La barra dei menu	23
Esercizi per la prima media	26
Esercizi per la seconda media	47
Esercizi per la terza media	72
Geometria analitica	82
Figure ottenute con la riga di inserimento	90
Esercizi per la prima superiore	105
Operazioni con i polinomi	105
Equazioni di primo grado e retta	107
Sistemi di equazioni di primo grado	108
Equazioni di secondo grado e parabola	109
Sistemi di equazioni di secondo grado	109
Equazioni di secondo grado e parabola	109
Disequazioni di primo grado	110
Disequazioni di secondo grado	111
Isometrie	113
Esercizi per la seconda superiore	117
Geometria analitica	117
Le rette	122
Luoghi geometrici	124
Fasci di rette	127
La parabola	128
Esercizi per la terza superiore	136
Iperbole	136
Circonferenza	139
Ellisse	141
Intersezioni e posizioni reciproche	145
Disegno di coniche come luoghi geometrici	148
Esercizi per la quarta superiore	151
Curve deducibili	154
Goniometria	158
Disegno di una funzione goniometrica come luogo	161
Semplici disequazioni goniometriche	166
Funzioni goniometriche inverse	172
Curve goniometriche deducibili	173

Risoluzione dei triangoli rettangoli	177
Risoluzione di un triangolo generico	181
Esercizi per la quinta superiore	185
Tangenti a una funzione	188
Punti di flesso di una funzione	191
Funzione crescente, decrescente e punti stazionari	192
Funzioni condizionate	195
Integrali definiti	196
Due funzioni delimitano una superficie chiusa	202
Valore medio di una funzione	206
Teorema di Rolle	207
Teorema di Lagrange	210
Calcolo del volume dei solidi di rotazione	211
Area di una superficie di rotazione	214
Area del trapezoide	215
Geogebra e formule	217

*A mia moglie, Donella,
e ai miei figli Benedetta,
Marco e Tommaso*

INTRODUZIONE

Geogebra è un software didattico per l'insegnamento della geometria, ma non solo, che fa parte del gruppo di software detti di “geometria dinamica”. È un software *open-source* rilasciato sotto licenza GNU GPL (*General Public Licence*), ossia può essere scaricato e usato gratuitamente ed essere copiato e distribuito liberamente, purché non a scopo di lucro. Si può scaricare dal sito del progetto www.geogebra.org. Ideatore e principale sviluppatore è Markus Hohenwarter della Florida Atlantic University (USA). Esiste un forum, in più lingue, italiano compreso, dove è possibile scambiare consigli e informazioni. Esistono poi aree Wiki in diverse lingue dove è possibile pubblicare i propri lavori oppure scaricare quelli degli altri.

In questo manuale saranno utilizzate le seguenti convenzioni:

- > Il simbolo “>” conduce a voci di menu nidificate. Ad es. la sequenza **File> Esporta> Foglio da disegno** indica che bisogna aprire la voce di menu **File**, selezionare da questo menu la voce **Esporta** e selezionare la voce **Foglio da disegno** dalla finestra di dialogo.

grassetto

Il testo in grassetto indica le voci del software da selezionare: voci di menu e opzioni delle finestre di dialogo.

monospazio

Questo tipo di carattere indica il testo o i caratteri che devono essere digitati da tastiera.

monospazio grassetto

Questo tipo di carattere indica i messaggi e le risposte che il software visualizza sullo schermo.

Per scaricare Geogebra nella versione offline, che funziona cioè anche se non si è connessi ad Internet, accedere al sito:

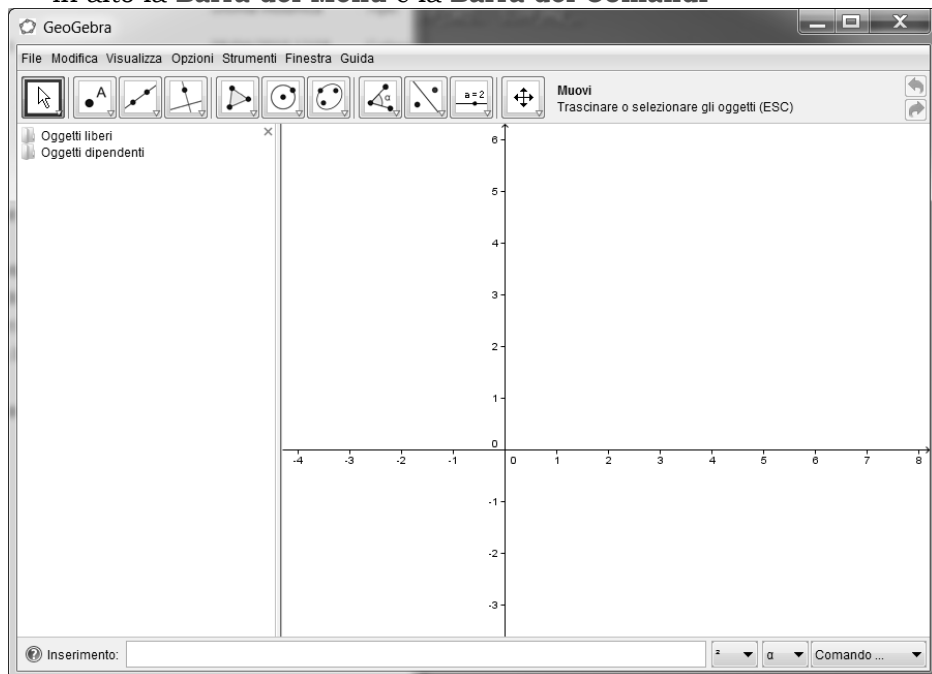
<http://www.geogebra.org/cms/it/installers>

e cliccare sull'icona del sistema operativo che si usa (Windows o altro). Dopo aver cliccato due volte sul file scaricato, scegliere **Italiano**, poi cliccare su **Avanti** più volte fino al tipo di installazione, qui scegliere **Tipica**. Come cartella di destinazione si può lasciare quella indicata e

infine cliccare sul pulsante **Installa**. Ad installazione completata cliccare sul pulsante **Eseguito** per far avviare il programma.

A questo punto appare la schermata iniziale, nella quale si possono distinguere quattro parti fondamentali:

- a sinistra la **Finestra Algebra**;
- al centro il **Foglio da Disegno**;
- in basso la **Barra Inserimento**;
- in alto la **Barra dei Menu** e la **Barra dei Comandi**






La barra degli strumenti di disegno

Cliccando sulla freccetta in basso a destra di ogni icona si apre un menu a tendina con gli altri comandi presenti.

Nel seguito indicheremo le icone con un numero come segue:



Icona 1




-  Muovi
-  Ruota intorno a un punto
-  Registra sul foglio di calcolo

Muovi. Permette di spostare un oggetto libero con il mouse, cliccando su di esso e trascinandolo. Premendo il tasto Canc si cancella l'oggetto selezionato. Tenendo premuto Ctrl si selezionano più oggetti che possono così essere gestiti assieme.

Ruota intorno a un punto. Scelto un punto come centro di rotazione, si possono ruotare gli oggetti liberi attorno a questo punto, cliccando prima sul centro di rotazione e poi trascinando il punto.

Registra sul foglio di calcolo. Con questo strumento è possibile memorizzare la sequenza dei valori assunti da un oggetto in movimento.

Icona 2

-  Nuovo punto
-  Intersezione di due oggetti
-  Punto medio o centro

Nuovo punto. Cliccando sul foglio da disegno, su un segmento, retta o conica, si crea un nuovo punto.

Intersezione di due oggetti. Per trovare l'intersezione di due oggetti si può cliccare successivamente su di essi, o direttamente nel punto di intersezione.

Punto medio o centro. Permette di trovare il punto medio tra due punti cliccando su ciascuno di essi; di un segmento cliccandoci su, o il centro di una conica cliccando sulla conica.



Icona 3

	Retta per due punti
	Segmento tra due punti
	Segmento di data lunghezza da un punto
	Semiretta per due punti
	Vettore tra due punti
	Vettore da un punto

Retta per due punti. Cliccare per fissare il primo punto, poi spostarsi e cliccare di nuovo.

Segmento tra due punti. Permette di tracciare il segmento che unisce due punti cliccando prima su uno poi sull'altro.

Segmento di data lunghezza da un punto. Cliccare per fissare il primo punto, poi nella finestra che si apre digitare il valore della sua lunghezza e cliccare sul pulsante Applica.

Semiretta per due punti. Cliccare per fissare il primo punto poi spostarsi e cliccare di nuovo per ottenere la semiretta.

Vettore tra due punti. Cliccare sul primo punto, poi spostarsi sul secondo e cliccare di nuovo.

Vettore da un punto. Prendere un punto A ed un vettore tra due punti B e C. Dopo aver preso lo strumento vettore da un punto, cliccare su A e sul vettore BC. Si ottiene il vettore AD avente stesso modulo, direzione e verso di BC.



Icona 4

	Retta perpendicolare
	Retta parallela
	Asse di un segmento
	Bisettrice
	Tangenti
	Polare o diametro
	Retta di regressione
	Luogo

Retta perpendicolare. Dati un punto ed una retta, cliccare sul punto e sulla retta per ottenere la perpendicolare.

Retta parallela. Dati un punto ed una retta, cliccare sul punto e sulla retta per ottenere la parallela.

Asse di un segmento. Dato un segmento, cliccare sullo stesso per ottenere il suo asse (perpendicolare passante per il punto medio).

Bisettrice. Cliccando sui tre punti che formano un angolo (quello centrale è il vertice) si ottiene la bisettrice. Cliccando sulle due semirette che formano un angolo si ottengono le due bisettrici (angolo interno ed esterno).

Tangenti. Cliccando su un punto A e poi sulla conica c si formano tutte le tangenti alla conica c passanti per A. Cliccando su una retta r ed una conica c, si generano tutte le tangenti alla conica c parallele alla retta r.

Polare o diametro. Cliccando su un punto A e su una conica c si ottiene la polare. Cliccando su una retta (o vettore) e poi sulla conica si ottiene la retta passante per il centro.

Retta di regressione. Per generare la retta, selezione una lista o un gruppo di punti e cliccare sullo strumento.

Luogo. Dopo aver cliccato sul punto A il cui luogo deve essere disegnato, cliccare sul punto B da cui A dipende. B deve essere un punto su un oggetto (segmento, conica...)



Icona 5

	Poligono
	Poligono regolare

Poligono. Si ottiene un poligono del numero di lati voluto (se si parte dal punto A alla fine cliccare di nuovo su A).

Poligono regolare. Selezionare due punti A e B, si aprirà una finestra con il campo di inserimento testo, dove andrà inserito il numero di lati del poligono.



Icona 6

	Circonferenza di dato centro
	Circonferenza dati centro e raggio
	Compasso
	Circonferenza per tre punti
	Semicirconferenza per due punti
	Arco di circonferenza di dato centro per due punti
	Arco di circonferenza per tre punti
	Settore circolare di dato centro per due punti
	Settore circolare per tre punti

Circonferenza di dato centro. Cliccare su un punto per definire il centro, spostarsi e cliccare di nuovo fino alla grandezza desiderata.

Circonferenza dati centro e raggio. Cliccare su un punto per definire il centro e nella finestra che si apre digitare il valore del raggio.

Compasso. Selezionare un segmento (o due punti) per fissare il raggio e poi cliccare sul punto che farà da centro.

Circonferenza per tre punti. Cliccare successivamente su tre punti dati e si ottiene la circonferenza passante per i tre punti.

Semicirconferenza per due punti. Cliccare su due punti per ottenere la semicirconferenza di diametro i due punti.

Arco di circonferenza di dato centro per due punti. Si fa clic sul centro della circonferenza e poi sui due punti estremi dell'arco.





Arco di circonferenza per tre punti. Si fa clic su tre punti, il primo e l'ultimo saranno gli estremi dell'arco.

Settore circolare di dato centro per due punti. Dati tre punti A, B e C, cliccare in A, centro del settore, poi in B e infine in C (C non deve necessariamente giacere sull'arco).

Settore circolare per tre punti. Si fa clic su tre punti e si ottiene il settore circolare che ha per estremi il primo e l'ultimo punto, il punto intermedio giace sull'arco








Icona 7

	Ellisse	Ellisse. Occorre prima cliccare su due punti che saranno i fuochi dell'ellisse e poi su un punto dell'ellisse.
	Iperbole	Iperbole. Cliccare sui due fuochi dell'iperbole e poi su un terzo punto che appartiene all'iperbole
	Parabola	Parabola. Occorre prima disegnare la retta direttrice della parabola, quindi cliccare sulla retta e poi sul fuoco.
	Conica per cinque punti	Conica per cinque punti. Cliccare successivamente su 5 punti. La conica è definita se almeno 4 non sono allineati.



Icona 8

	Angolo	Angolo. Fornisce l'angolo tra tre punti (cliccare in senso orario per avere l'angolo interno). L'angolo tra due segmenti o tra due rette (senso antiorario) e gli angoli interni di un poligono (senso orario).
	Angolo di data misura	Angolo di data misura. Dopo aver cliccato su due punti si apre una finestra nella quale si inserisce il valore dell'angolo (compare 45°). Scegliendo Clockwise l'angolo viene disegnato in senso orario, con Counter Clockwise in senso antiorario.
	Distanza o lunghezza	Distanza o lunghezza. Fornisce la distanza tra due punti (cliccando su di essi il valore compare nella Finestra Algebra) oppure tra un punto ed una retta o tra due rette.
	Area	Area. Permette di calcolare l'area di un poligono, di un cerchio o di un ellisse.
	Pendenza	Pendenza. Calcola il coefficiente angolare della retta.



Icona 9

	Simmetrico rispetto a una retta
	Simmetrico rispetto a un punto
	Inversione circolare
	Ruota intorno a un punto di un angolo
	Trasla di un vettore
	Dilata l'oggetto da un punto, dato un fattore

Simmetrico rispetto a una retta. Cliccare sul punto A che deve subire la simmetria e poi sulla retta.

Simmetrico rispetto a un punto. Cliccare sul punto A che deve subire la simmetria e poi su B centro della simmetria stessa.

Inversione circolare. Selezionare il punto e poi la circonferenza.

Ruota intorno a un punto di un angolo. Cliccare sul punto A che deve essere ruotato e poi su B, centro della rotazione. Nella finestra che si apre scegliere l'angolo ed il verso della rotazione.

Trasla di un vettore. Dopo aver realizzato un vettore tra due punti A e B, scegliere questo strumento, cliccare prima sull'og-getto da traslare e poi sul vettore traslazione.

Dilata l'oggetto da un punto, dato un fattore. Disegnare un poligono e prendere un punto. Scegliere lo strumento e cliccare prima sul poligono, poi sul punto, centro di dilatazione, e nella finestra che si apre inserire il valore del fattore di dilatazione.



Icona 10

	Slider
	Casella di controllo per mostrare/nascondere oggetti
	Inserisci testo
	Inserisci immagine
	Relazione tra due oggetti









Slider. Uno slider è una rappresentazione grafica di un numero o di un angolo e si può creare facilmente cliccando sull'oggetto col tasto destro e scegliendo Mostra oggetto. Nella finestra dello slider si può specificare l'intervallo o l'incremento.

Casella di controllo per mostrare / nascondere oggetti. Viene creata una casella di controllo che permette di visualizzare o nascondere più oggetti.

Inserisci testo. Si può scrivere semplicemente del testo nella finestra che si apre, oppure eseguire dei calcoli come per esempio l'area di un poligono: "L'area del poligono è=" +P (testo dinamico)

Inserisci immagine. Inserisce il vertice inferiore sinistro dell'immagine nel punto del foglio da disegno dove si clicca.

Relazione tra due oggetti. Fornisce la relazione esistente tra due oggetti. Se ad esempio si sono disegnate 2 rette parallele, cliccando con questo strumento su ciascuna di esse, compare una finestra con la scritta retta a e retta b: parallela.

 Icona 11	
	Muovi la Vista Grafica
	Zoom avanti
	Zoom indietro
	Mostra / nascondi oggetto
	Mostra / nascondi etichetta
	Copia stile visuale
	Elimina oggetto
<p>Muovi la Vista Grafica. Permette di spostare il foglio da disegno, cliccando e trascinandolo dove voluto.</p>	
<p>Zoom avanti. Permette di ingrandire la visualizzazione di un oggetto.</p>	
<p>Zoom indietro. Permette di ridurre la visualizzazione di un oggetto.</p>	
<p>Mostra / nascondi oggetto. Permette di nascondere o mostrare un oggetto precedentemente nascosto. Una volta cliccato con questo strumento sull'oggetto da nascondere si deve cliccare sul comando Muovi.</p>	
<p>Mostra / nascondi etichetta. Permette di nascondere l'etichetta associata a un punto, agli estremi di un segmento. Cliccando di nuovo con tale strumento su una etichetta nascosta, ricompare.</p>	
<p>Copia stile visuale. Permette di copiare le caratteristiche visuali di un oggetto per riportarle su un altro oggetto.</p>	
<p>Elimina oggetto. Cancella gli oggetti sui quali si clicca una volta scelto questo strumento.</p>	