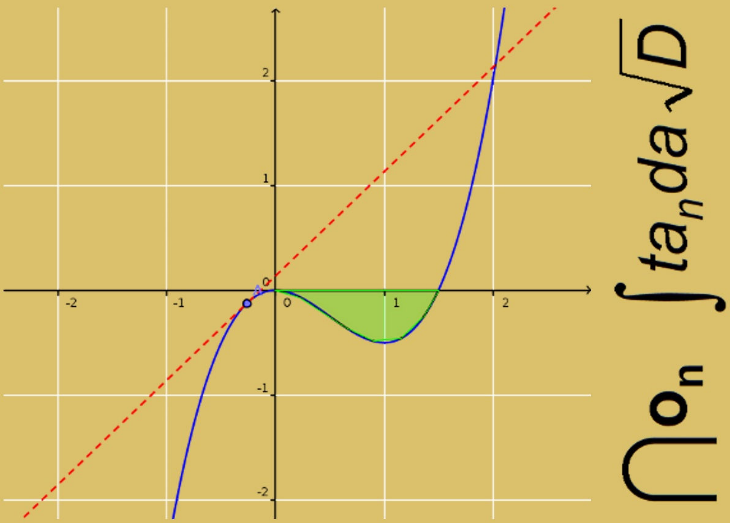
Matematicamente.it

GIORNATA DI STUDIO

ANALISI NON STANDARD
per le scuole superiori



$$D_x f(x) = st\left(\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\right)$$

Atti del convegno

Venezia 20 11 2011

GIORNATA DI STUDIO
ANALISI NON STANDARD

nelle scuole superiori

Atti del convegno

Relatori

Giorgio Goldoni, *ITIS Leonardo da Vinci*, Carpi

Paolo Bonavoglia, *Liceo Classico "M. Foscarini"*, Venezia

Pietro Cacciatore, *Liceo Classico "Tito Livio"*, Padova

Christian Bonfanti, *Liceo Scientifico "R. Steiner"*, Milano

La giornata si è svolta nella sala del Drago

presso il Convitto Nazionale “Marco Foscarini” di Venezia

il giorno 20-11-2011.

Impaginazione a cura di *Paolo Bonavoglia*

Venezia aprile 2012

ISBN 9788896354285

Stampa
Universal Book – via Botticelli, 22 – 87036 Rende (CS)

Indice generale

Pres

L'insegnamento dell'analisi nei licei, come del resto all'Università, ricalca quasi sempre la sequenza limiti-derivate-integrali, dove i limiti sono definiti alla maniera di Weierstrass, cosa che comporta notevoli difficoltà di comprensione iniziale e un appesantimento tale da sacrificare gli altri due argomenti in particolare l'ultimo (gli integrali). Un po' come un pranzo con un antipasto tanto pesante da far passare in secondo piano i piatti principali.

In realtà dal 1961 esiste un diverso approccio all'analisi che recupera in modo logicamente rigoroso gli infinitesimi di Leibniz. Si tratta della Non-Standard Analysis (NSA) di Abraham Robinson.

La NSA ha molti aspetti interessanti, uno di questi è appunto la possibilità di affrontare in modo radicalmente diverso l'insegnamento dell'analisi nelle scuole superiori, introducendo derivate e integrali prima dei limiti, e non necessariamente all'ultimo anno.

Questa giornata di studio, nata nell'ambito della lista *Cabrinews*, su proposta del prof. Tito Pellegrino, ha messo a confronto quattro esperienze di insegnamento dell'analisi nelle scuole superiori che seguono in maggiore o minore misura l'approccio NSA.

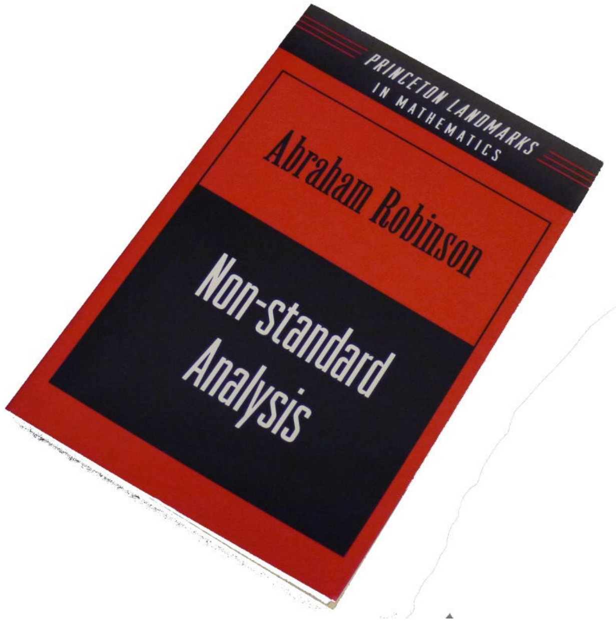
La giornata si è svolta negli spazi messi a disposizione dal Convitto Nazionale “Marco Foscarini” di Venezia ed è stata inaugurata dal Rettore prof. Rocco Fiano.

Erano presenti più di quaranta docenti di matematica, tra i quali il prof. Ruggero Ferro dell'Università di Verona, traduttore del libro di Keisler e pioniere della NSA in Italia, che è anche intervenuto nel pomeriggio sul modo di introdurre numeri reali ed iperreali nella scuola.

Per l'organizzazione e la buona riuscita del convegno è stato determinante l'aiuto fornito da quattro studenti del liceo, ai quali va un doveroso ringraziamento: Marco Ciotola (2C), Gianni De Michelis (2CE), Alvise Dolcetta (1B), Marco Voltolina (2AE) e Giacomo Zamprogno (1B).

1961-2011

Fu infatti nel 1961 che Abraham Robinson pubblicò il suo primo articolo sull'Analisi Non standard; nell'autunno del 1960 aveva avuto per la prima volta l'idea di rifondare l'Analisi matematica sui numeri infinitamente piccoli (*infinitesimi*) e su quelli infinitamente grandi (*infiniti*) come era ai suoi inizi con Leibniz, Bernoulli, Eulero, mentre è del 1965 il classico *Non-standard Analysis*.



20 a

di Giorgio Goldoni

Ho iniziato a insegnare l'Analisi non standard, che preferisco chiamare col vecchio nome di *calcolo infinitesimale*, nell'anno scolastico 1992/1993, nel corso di informatica dell'Istituto Tecnico Industriale "Leonardo da Vinci" di Carpi (MO), dove insegnavo già da diversi anni e dove ancora oggi insegno. Nel primo anno ho introdotto in modo molto immediato e informale gli infinitesimi e gli infiniti, concentrandomi principalmente sul loro uso nel concetto di derivata e di integrale. Ben presto però, nello svolgimento delle parti più avanzate del programma, ho avvertito la necessità di premettere una trattazione più ampia e più chiara dei numeri iperreali. Questo mio intervento vuole essere una testimonianza di come i numeri iperreali possano essere introdotti in modo molto intuitivo nella scuola superiore facendo uso di strumenti ottici ideali ispirati ai microscopi e ai telescopi di Keisler.

Come introdurre i numeri iperreali?

La costruzione dei numeri iperreali a partire dai numeri reali è certamente improponibile nella scuola superiore e, in particolare, in un istituto tecnico industriale, dove la matematica ha un aspetto prevalentemente applicativo. Del resto, ormai, nemmeno nei corsi universitari di Analisi standard si affronta in dettaglio la costruzione dei numeri reali a partire dai razionali, ma si introducono i reali in modo assiomatico, che è come dire che ci si appoggia, di fatto, all'intuizione che lo studente già possiede delle loro proprietà. La trattazione assiomatica ha il pregio di fornire immediatamente l'operatività, ma nasconde un grave pericolo per lo studente. Infatti, l'assiomatizzazione è di solito la sintesi finale di una vasta esperienza precedente, che lo studente non possiede e la cui mancata conoscenza rischia di impedirgli di formarsi un'immagine intuitiva dello strumento che sta usando, col rischio di sentirsi definitivamente estraneo all'argomento. Ho così optato sì per un approccio assiomatico, ma opportunamente annacquato e accompagnato da una visualizzazione che renda il più possibile ovvi gli enunciati degli assiomi, riempiendoli di significato come si fa per la geometria.

Da dove partire?

Nella mia esperienza, la cosa migliore si è rivelata partire da qualche problema in cui si veda la potenza dell'uso degli infinitesimi e degli infiniti; qualche problema non banale da risolvere per altra via dove, con gli infinitesimi e gli infiniti, in quattro righe si arriva al risultato giusto. In modo informale, ovviamente. Questo per motivare lo studente a intraprendere una strada che subito lo colpisce per la spettacolarità del modo di ragionare e per la rapidità con cui si arriva al risultato.

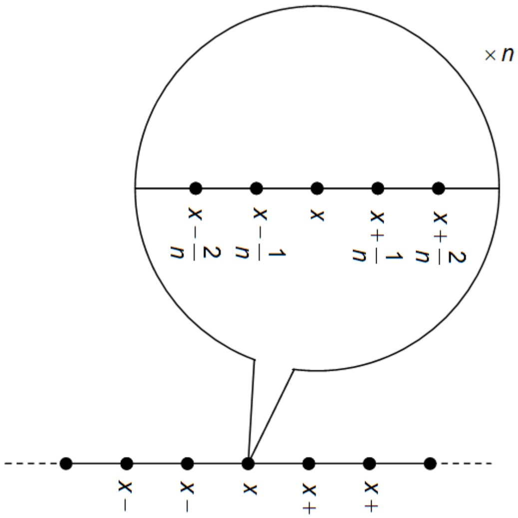
Ma, riguardo all'introduzione assiomatica dei numeri iperreali, da dove partire? Come prima cosa, cerco di far capire ai ragazzi come mai nei numeri reali non ci sia posto né per gli infinitesimi (non nulli, perché lo zero c'è!) né per gli infiniti. In una carrellata di problemi introduttivi si è fatto uso di quantità infinitesime o infinite per fare un certo calcolo, ma non ci sono numeri reali infinitesimi né infiniti. Perché? A questo punto invito gli studenti ad analizzare il processo di misura di una grandezza, processo che ha costituito di solito per loro il primo approccio ai numeri reali. Per misurare un segmento, ad esempio, si guarda quante volte ci sta l'unità di misura, poi si passa ai decimi, ai centesimi, ecc. Si tratta di un procedimento che è legato all'uso particolare della base dieci, ma che, di fatto, è del tutto generale. Invitando i ragazzi ad analizzare quali proprietà dei segmenti siano coinvolte in questo processo, emerge immediatamente l'accettazione dell'assioma che un segmento possa essere sempre diviso in un numero arbitrario di parti uguali. Quasi mai, però, gli studenti sono consapevoli del fatto che persino il primo passo del processo di misura implichi l'accettazione di una proprietà dei segmenti di solito taciuta nella scuola dell'obbligo, e cioè che riportando successivamente l'unità di misura si possa superare, prima o poi, qualsiasi segmento. Il primo passo, quello che consiste nel trovare la parte intera del numero che esprime la misura del segmento dato rispetto all'unità, presuppone dunque che l'unità di misura, riportata un numero sufficiente di volte, finisca per superare il segmento dato. Quindi, il fatto teorico che impedisce l'esistenza dei numeri infinitesimi e infiniti è quello che di solito viene chiamato assioma di Eudosso o di Archimede: dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore. Per inciso, la tacita accettazione di questo assioma è resa oggi ancor più difficile da riconoscere perché siamo abituati a misurare ogni ordine di lunghezze e l'assioma di Eudosso/Archimede è finito col diventare un pregiudizio. Gli astronomi oggi misurano le distanze delle stelle e delle galassie ma, nell'antichità, c'erano seri dubbi persino sul fatto che si potesse misurare la distanza Terra-Luna. E il dubbio non era dovuto a difficoltà tecniche, ma riguardava l'esistenza stessa di un multiplo dell'unità di misura in grado di superare quella distanza. Archimede, nell'Arenario, ci dice che *"molti affermano essere infiniti i granelli di sabbia della spiaggia di Siracusa"*. Oggi, al contrario, abbiamo il pregiudizio, fin da piccoli, che si possa misurare ogni distanza. C'è un'altra versione, del tutto equivalente alla prima, dell'assioma di Eudosso/Archimede: dati due segmenti diversi esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore. Si tratta di enunciati equivalenti dal punto di vista logico, ma differenti dal punto di vista psicologico: il primo aiuta in modo più netto l'intuizione ad arrivare alla conclusione che non esistono segmenti infiniti, mentre il secondo che non esistono segmenti infinitesimi. Per quanto sia grande un segmento, c'è un multiplo dell'unità di misura che lo supera, quindi non c'è posto per segmenti infiniti. Per quanto sia piccolo un segmento, c'è un sottomultiplo dell'unità di misura che diventa più piccolo di quello, quindi non esistono segmenti infinitesimi. Per poter introdurre segmenti infiniti o infinitesimi dobbiamo allora partire dall'ammettere l'esistenza di coppie di segmenti tali che nessun multiplo del minore superi il maggiore o che nessun sottomultiplo del maggiore sia più piccolo del minore. Dal punto di vista dell'intuizione, significa accettare che un essere immortale che cammini a velocità costante con passi uguali al segmento minore non possa mai raggiungere la fine del segmento maggiore.

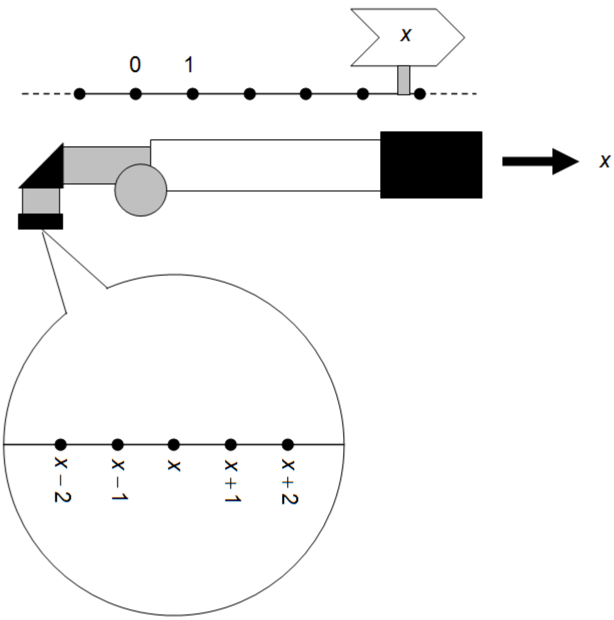
Infinitesimi e infiniti e loro visualizzazione

Ho dedicato i primi anni a sviluppare un approccio visivo molto efficace agli infinitesimi e agli infiniti. Questo non per evitare una trattazione algebrica, che svolgo in parallelo a quella visiva, ma per fare in modo che gli studenti posseggano una forte intuizione degli iperreali e dei risultati delle operazioni coi vari tipi di iperreali. Conformandomi all'uso, chiamo *numeri standard* i numeri reali e *segmenti standard* i segmenti la cui misura rispetto a un'unità prefissata è esprimibile mediante un numero reale. Nella rappresentazione visiva, chiamo poi *scala ordinaria* la scala della retta in cui i punti corrispondenti ai numeri 0 e 1 sono ben visibili e nettamente separati fra loro. Non si tratta di una scala ben precisa: nel campo visivo rappresentato dal foglio o dalla lavagna devo poter vedere lo zero e l'uno ben separati fra loro.

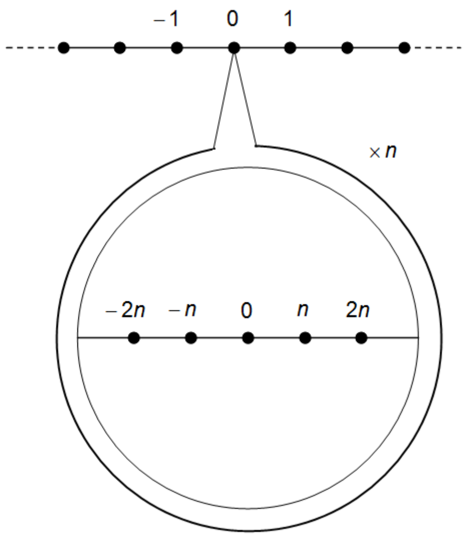
Faccio poi uso di alcuni strumenti ottici immaginari. Il primo è il *microscopio standard* a n ingrandimenti. Lo posso puntare su un numero x qualsiasi della retta nella scala ordinaria (ma anche in qualsiasi altra scala) e vedo una porzione di retta centrata in x e ingrandita di n volte.

Un secondo strumento è il *telescopio standard*, che ci mostra una parte lontana di retta nella stessa scala della retta vicina, qualsiasi sia la sua scala. Per esempio, il numero *x* è fuori del campo visivo (c'è il cartello "a destra"). Allora punto il telescopio su *x* e vedo una porzione di retta centrata in *x*, nella stessa scala della parte di retta che rientra nel campo visivo.





Introduco infine un terzo strumento: lo zoom all'indietro, che chiamo semplicemente *zoom standard*. Lo zoom standard ci mostra una porzione di retta rimpicciolita di *n* volte rispetto alla scala iniziale e si punta tipicamente nell'origine.



Gli strumenti ottici appena introdotti possono essere combinati tra loro, nel senso che ciascuno strumento può essere applicato al campo visivo di un altro. Ad esempio, posso puntare un microscopio nel campo visivo di un telescopio. Dico ai miei ragazzi che un telescopio standard puntato su Marte ci mostrerebbe i marziani come se fossero davanti a noi e puntando un microscopio nell'immagine del telescopio potremmo osservare i pori della pelle marziana! È importante osservare che tutto quello che possiamo descrivere con gli strumenti ottici ha un esatto corrispondente algebrico e che la scelta dell'approccio visivo ha lo scopo di fissare in profondità nello studente le proprietà dei numeri iperreali.

A questo punto passo a definire i segmenti e i numeri infiniti e infinitesimi. Che cos'è un segmento infinitesimo? Un segmento