II GIORNATA DI STUDIO ANALISI NON STANDARD nelle scuole superiori

Atti del convegno

Modena 16 set 2012

Relatori

Roberto Zanasi, *ITI "Enrico Fermi"*, Modena

Andrea Centomo, *Liceo "F.Corradini"*, Thiene

Pietro Cacciatore, *Liceo Classico "Tito Livio"*, Padova

Paolo Bonavoglia, *Liceo Classico "M.Foscarini"*, Venezia

Giorgio Goldoni, *ITIS "Leonardo da Vinci"*, Carpi

Sergio Casiraghi, *IIS "Alberto De Simoni"*, Sondrio

Christian Bonfanti, *Liceo Scientifico "R.Steiner"*, Milano

La giornata si è svolta nell'aula magna del
Civico Planetario "Francesco Martino" di Modena
il giorno 16-09-2012.

Impaginazione a cura di *Paolo Bonavoglia*

@ Matematicamente.it

ISBN 978-88-96354-38-4

gennaio 2013

Indice generale

Presentazione

L'insegnamento dell'analisi nei licei, come del resto all'Università, ricalca quasi sempre la sequenza limiti-derivate-integrali, dove i limiti sono definiti alla maniera di Weierstrass, cosa che comporta notevoli difficoltà di comprensione iniziale e un appesantimento tale da sacrificare gli altri due argomenti in particolare l'ultimo (gli integrali). Un po' come un pranzo con un antipasto tanto pesante da far passare in secondo piano i piatti principali.

In realtà dal 1961 esiste un diverso approccio all'analisi che recupera in modo logicamente rigoroso gli infinitesimi di Leibniz. Si tratta della Non-Standard Analysis (NSA) di Abraham Robinson.

La NSA ha molti aspetti interessanti, uno di questi è appunto la possibilità di affrontare in modo radicalmente diverso l'insegnamento dell'analisi nelle scuole superiori, introducendo derivate e integrali prima dei limiti, e non necessariamente all'ultimo anno.

L'idea di una giornata di studio dedicata all'insegnamento della NSA nei licei era nata nel 2011 nell'ambito della lista Cabrinews, su proposta del prof. Tito Pellegrino e si era concretizzata il 20-11-2011 a Venezia nei locali del Convitto Liceo “Marco Foscarini”.

Sin da allora si era radicata l'idea di una seconda giornata che si è svolta il 16-09-2012 nell'aula magna del civico Planetario "Francesco Martino" di Modena.

Erano presenti circa sessanta docenti di matematica, tra i quali anche quest'anno il prof. Ruggero Ferro dell'Università di Verona, pioniere della NSA in Italia, che è anche intervenuto nel pomeriggio sul tema degli ultrafiltri, e il professor Consolato Pellegrino dell'Università di Modena e Reggio Emilia.

L'incontro si è concluso con una rappresentazione nella cupola del planetario dei moti apparenti dei pianeti, seguita da una ricostruzione dettagliata dell'idea centrale che ha portato all'innovazione copernicana, illustrata con l'ausilio di animazioni realizzate col Cabrì.

Hanno contribuito in modo determinante alla riuscita del convegno l'ing. Enrico Artioli, per gli aspetti organizzativi, e l'ing. Giuliano Vicenzi, che ha effettuato le riprese degli interventi dei relatori, entrambi docenti dell'ITIS "Fermo Corni" di Modena. Un prezioso aiuto è poi stato fornito dagli studenti Gabriele Bani, Massimiliano Bosi e Kateryna Konotopska della classe 4AI dell'ITIS "Leonardo da Vinci" di Carpi e Lorena Goldoni della classe 5C del Liceo Scientifico "Alessandro Tassoni" di Modena.

Perché ho deciso di insegnare la NSA

di Roberto Zanasi

Grazie all'analisi non standard è possibile utilizzare gli infiniti e gli infinitesimi in maniera "naturale".

1 Gli infiniti e gli infinitesimi non esistono

Io protesto contro l'uso di una quantità infinita come un'entità attuale; ciò non è mai consentito in matematica. L'infinito è solo un modo di dire, in cui si parla opportunamente di limiti verso i quali determinati rapporti possono approssimarsi quanto desiderato, mentre ad altri è concesso di aumentare senza alcuna limitazione.

Carl Friederich Gauss[1]

Il processo di aritmetizzazione dell'analisi avvenuto nella seconda metà dell'800 ha permesso di costruire basi solide per l'analisi matematica, togliendo di mezzo concetti allora nebulosi come i numeri infiniti e infinitesimi. Chi ha studiato analisi non trova obiezioni alle parole di Gauss, l'infinito non è un numero col quale si possano eseguire delle operazioni.

Eppure per uno studente di scuola superiore l'affermazione di Gauss è in contrasto con l'esperienza: due rette parallele, rappresentate in prospettiva, si intersecano in un punto che si trova sulla linea dell'orizzonte. Frasi come "due rette parallele si intersecano all'infinito" sono ben comprensibili da uno studente.

Personalmente, poi, ho avuto la fortuna di avere, come insegnante di matematica al liceo, una delle responsabili del laboratorio di macchine matematiche che si trova a Modena[2]. All'epoca (metà degli anni '80) quelle macchine erano in costruzione in un laboratorio della mia scuola, e noi studenti potevamo vederle e utilizzarle. Non avevamo problemi a parlare di punti impropri, coordinate proiettive omogenee, rette parallele che si

1 Citato in *Tutto e di più, storia compatta dell'*∞, p. 169, che a sua volta cita Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, p. 993.

2 http://www.mmlab.unimore.it/

intersecano, tangenti all'infinito. Per noi – e, credo, per tutti gli studenti di scuola superiore – l'infinito non era solo un modo di dire.

Una delle critiche più frequenti rivolte ai lavori di Newton e Leibniz nel campo dell'analisi infinitesimale è stata quella relativa, appunto, all'esistenza degli infinitesimi. D'Alembert, ad esempio, ha affermato che “una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio tra qualcosa e niente, è una pura chimera[3]”.

È stato grazie a queste critiche che le basi dell'analisi sono state rifondate, bandendo dal linguaggio infiniti e infinitesimi. Credo, però, che iniziare lo studio dell'analisi, in una scuola superiore, utilizzando i limiti, gli epsilon, i delta, gli *M*, non sia il metodo più efficace dal punto di vista educativo.

Persino durante la mia prima lezione di analisi all'università l'insegnante (che ci ricordava sempre che la matematica è fatta di definizioni e teoremi, definizioni e teoremi...) impiegò i primi dieci minuti a fare esempi non rigorosi per introdurre il concetto di limite. Dieci minuti di lezione universitaria paragonabili a qualche mese di lezione alle scuole superiori.

2 Entriamo nel dettaglio

Prendiamo, per esempio, il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

Come ci comportiamo nei confronti di uno studente che scrive come nella formula qui sotto?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Molti insegnanti segnalerebbero un errore, motivati dal fatto che infinito non è un numero e non è quindi lecito inserirlo all'interno di un'operazione.

Nessuno, però, durante la ricerca del risultato, utilizzerebbe la definizione classica: quando noi calcoliamo quel limite, non pensiamo al fatto che risulta zero perché per ogni distanza da zero esiste un valore di *x*

3 Citato da Boyer, *Storia della matematica*, p. 521.

tale che per ogni valore maggiore di esso la funzione rimane vicina a zero per meno di quella distanza. In effetti, la verifica di un limite non è costruttiva: è necessario conoscere in anticipo il risultato per poterne verificare la correttezza.

Gli studenti, però, dopo aver preso atto che non è possibile scrivere la divisione tra 1 e infinito, domandano come devono comportarsi. Nella scuola in cui insegno noi docenti di matematica diciamo semplicemente che "*uno diviso infinito uguale a zero* si pensa ma non si dice"... Non è un gran che, come strumento didattico.

3 I NUMERI IPERREALI

"Il reciproco di un infinito è un infinitesimo" è una frase alla quale possiamo dare un significato rigoroso anche senza utilizzare gli epsilon, i delta, gli M... Per farlo, abbiamo bisogno dei numeri iperreali.

Essi, così come si fa con i numeri reali, possono essere costruiti oppure definiti.

La costruzione è però molto complicata, richiede notevoli conoscenze di teoria degli insiemi e di logica, e non è certamente alla portata di uno studente delle superiori. È però possibile seguire un'altra strada, quella della definizione assiomatica.

Anche i numeri reali possono essere definiti assiomaticamente: essi sono l'unico campo ordinato completo archimedeo. Esaminiamo un po' più nel dettaglio le definizioni in gioco. Affermando che i numeri reali formano un campo, introduciamo le operazioni e le loro proprietà. Il fatto che siano un insieme ordinato significa che introduciamo la relazione di ordinamento tra i numeri e che possiamo confrontare i numeri tra di loro.

Il concetto di completezza è un po' più delicato, esistono due definizioni: quella secondo Dedekind e quella secondo Cauchy. In termini assolutamente non rigorosi, entrambe affermano che nella retta reale non vi sono "buchi".

Ai fini del passaggio ai numeri iperreali, comunque, a noi interessa il fatto che i numeri reali formano un insieme archimedeo. L'assioma di Eudosso-Archimede afferma che dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore o, equivalentemente, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore. In sostanza, questo assioma nega l'esistenza di quantità infinite o infinitesime.

Hilbert utilizzava il termine *completo* in relazione alla proprietà archimedea: intendeva affermare che l'insieme dei numeri reali è il più grande insieme che gode di quella proprietà (mentre la completezza secondo Dedekind o Cauchy implica automaticamente la proprietà archimedea).

Negando l'assioma di Eudosso-Archimede possiamo permettere l'esistenza dei numeri iperreali.

Ecco dunque una definizione assiomatica di questo insieme:

L'insieme $\mathbf{R}^*$ dei numeri iperreali è una struttura algebrica che gode delle seguenti proprietà:

- $\mathbf{R}^*$ contiene il sistema dei numeri reali $\mathbf{R}$ (questo non significa solo che ogni numero reale è contenuto in $\mathbf{R}^*$, ma anche che ogni relazione definita sui reali è anche definita sugli iperreali).
- $\mathbf{R}^*$ contiene un infinitesimo (o, equivalentemente, un infinito).
- Tutte le formule del primo ordine vere in $\mathbf{R}$ lo sono anche in $\mathbf{R}^*$, e viceversa.

L'ultimo assioma è detto *principio di trasferimento*, e permette di trasferire affermazioni fatte sui numeri iperreali ai numeri reali, e viceversa.

Vediamo ora perché non importa se, nel secondo assioma, si introduce un infinitesimo o un infinito. Si era detto che, utilizzando i numeri iperreali, è possibile dare un significato rigoroso alla frase “il reciproco di un infinito è un infinitesimo”. Ammettiamo allora, per il secondo assioma, l'esistenza di un numero infinito M, cioè un numero maggiore di qualunque numero reale (e dunque positivo). Vogliamo dimostrare che $1/M$ è un infinitesimo, cioè un numero (positivo) minore di qualunque numero reale positivo.

Se $1/M$ non fosse un infinitesimo, vorrebbe dire che esiste un qualche numero reale a tale che $1/M$ è maggiore di a. Allora $1/a$ risulterebbe maggiore di M, ma questo è impossibile perché M è infinito.

Dunque l'esistenza di un infinito implica quella di un infinitesimo, e viceversa.

4 Un ultimo esempio

Qualche anno fa ho svolto esercitazioni di analisi agli studenti del primo anno di università. Durante lo svolgimento del calcolo di un limite, mi è capitato di dover calcolare il comportamento asintotico, per *x* che tende a più infinito, di una espressione simile a questa:

$$\frac{3x^2-x+1}{2x^2+\sqrt{x}}$$

Io ho affermato che il risultato di quel limite era 3/2, e ho quindi proseguito i calcoli senza commenti ulteriori. Una volta scritto il risultato ho notato che uno degli studenti aveva alzato una mano, gli ho dato la parola, e lui mi ha domandato perché il risultato fosse proprio 3/2. Come avevo fatto a trovarlo senza fare calcoli?

Io ho risposto che avevo semplicemente guardato i coefficienti dei termini di grado massimo, perché in un rapporto tra infiniti sono gli infiniti di ordine maggiore che determinano il risultato. Lo studente mi ha guardato con una espressione interrogativa, e mi ha domandato: "ma si può fare così?". Lui avrebbe voluto svolgere tutti i calcoli, raccogliere a fattor comune i termini di grado massimo, semplificare e, alla fine, calcolare il risultato.

Mi sono reso conto che quello studente (e, come lui, molti altri) aveva imparato una tecnica che lo avrebbe portato a trovare il risultato corretto, ma senza capire minimamente quello che stava facendo.

Credo che in matematica il rigore sia importante, ma non deve farci perdere di vista il senso di ciò che stiamo insegnando.

5 Bibliografia

1 Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, 1980

2 David Foster Wallace, *Tutto, e di più: storia compatta dell'*∞, Roma, 2011

3 James M. Henle and Eugene M. Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, New York, 2003

4 Giorgio Goldoni, *Il professor Apotema insegna... i numeri iperreali*, Rolo, 2011.

Tangenti a una curva: da standard a non-standard

di Andrea Centomo

Il concetto di retta tangente a una curva è molto delicato e può essere introdotto da diversi punti di vista [1].
Nel biennio della scuola superiore, talvolta già nella scuola secondaria di I grado, esso viene presentato nel caso particolare della circonferenza. Ricorrendo ad una definizione globale la retta tangente viene definita come quell'unica retta che ha in comune con la circonferenza un solo punto.

All'inizio del triennio è diffusa la prassi di tentare di estendere questa definizione alle coniche nel piano cartesiano. Ciò a dispetto del fatto che essa non funziona. Se prendiamo ad esempio una parabola, è chiaro che in ogni suo punto passano due rette che hanno in comune con essa un solo punto, ma solo una di queste è la tangente. Il discorso sarebbe diverso se si potesse lavorare nel piano proiettivo, ma ciò esula dagli scopi della scuola secondaria.

Successivamente il concetto di retta tangente viene ripreso nell'ambito dello studio del calcolo differenziale, quando si introduce la derivata. Come è stato stato posto in evidenza in un lavoro di Irl Bivens [2], che non a caso è stato insignito nel 1989 dell'Hasse award, anche questo approccio presenta diversi problemi dal punto di vista didattico. La derivata e conseguentemente il concetto di tangenza si appoggiano al concetto di limite notoriamente difficile da penetrare per gli studenti. Anche l'usuale ricorso all'interpretazione geometrica di retta tangente come limite di una opportuna famiglia di rette secanti, che dovrebbe aiutare l'intuizione, non si rivela sempre efficace. Le conclusioni tratte da Bivens sono allora che anche alla base dello studio dell'analisi a livello elementare dovrebbe essere posta l'idea di retta tangente come “migliore approssimazione lineare” al grafico della funzione in un punto.

Questo concetto, che di solito trova spazio solo nei corsi universitari, secondo Bivens dovrebbe essere proposto intuitivamente, senza pretesa di rigore, per applicarlo allo studio di esempi significativi, utilizzandolo

come punto di partenza per motivare successivamente l'introduzione della derivata nella maniera usuale.
In questo lavoro, dopo aver ripreso e ampliato le considerazioni fatte in precedenza, si discute il concetto di retta tangente nell'analisi non-standard evidenziando le sue relazioni con l'approccio standard e mostrando come esso sia, a ben guardare, quello che permette di concretizzare nel modo più efficace la proposta avanzata da Bivens.

1 Un solo punto in comune

In diversi libri di testo per il biennio della scuola superiore si trova la seguente.

Definizione 1. *Dati una circonferenza* C *ed un punto* P *ad essa appartenente, la retta* t *si dice tangente a* C *in* P *se* $t \cap C = \{P\}$.

L'aspetto maggiormente critico di questa definizione è che la tangenza viene qui proposta come una proprietà globale mentre, per sua natura, è una proprietà locale. Per questa ragione la Definizione 1 non si può generalizzare a curve piane qualsiasi.

Nonostante ciò la si ritrova nella scuola secondaria di II grado, una volta che gli studenti si sono impadroniti di alcune nozioni di geometria analitica, riformulata come segue.

Nel piano cartesiano (O, x, y) una circonferenza di centro (x_C, y_C) e raggio $r>0$ è descritta dall'equazione

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2.$$

Dato un qualsiasi punto $(x_P, y_P) \in C$ il fascio di rette che lo ammette come centro ha equazione

$$a(x-x_P)+b(y-y_P)=0$$

con a e b numeri reali non contemporaneamente nulli. Mettendo a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione del fascio di rette

$$\begin{cases}(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2\\ a(x-x_P)+b(y-y_P)\end{cases}$$

e imponendo che il sistema abbia un'unica soluzione, si riesce sempre a determinare univocamente l'equazione della retta tangente.

Nella didattica liceale e più in generale nel tentativo di evitare procedimenti che richiedano il calcolo differenziale [3] è diffusa la prassi di tentare un'estensione della Definizione 1 alle coniche (non degeneri). Ciò a dispetto del fatto che purtroppo non funziona. Infatti data una parabola e un punto ad essa appartenente, esistono sempre due rette passanti per esso che hanno solo quel punto in comune con la conica: una è la tangente e l'altra la parallela all'asse. Come possiamo giustificare la scelta di una rispetto all'altra se l'unico criterio è quello dell'avere un unico punto in comune?

Le cose sarebbero diverse se ragionassimo nel piano proiettivo, dove le sezioni coniche sono la "stessa conica" con l'unica differenza di come intersecano la retta all'infinito (l'iperbole in due punti, la parabola in uno, l'ellisse in nessuno). In questo caso, ricorrendo al concetto di retta polare, si riescono a trattare in modo efficace tutte le questioni di tangenza tra retta e conica, senza cadere in situazioni ambigue. Tuttavia è difficile immaginare di potersi ricondurre a questo punto di vista nella didattica liceale.

Sembra inoltre didatticamente inopportuno introdurre formule come la *legge dello sdoppiamento* che, data l'equazione di una conica non degenere C e un punto $P \in C$, permettono di determinare rapidamente l'equazione della tangente operando misteriose sostituzioni del tipo

$$x \rightarrow \frac{x+x_P}{2}, y \rightarrow \frac{y+y_P}{2}, x^2 \rightarrow x\,x_P, y^2 \rightarrow y\,y_P.$$

L'idea del solo punto in comune e legge dello sdoppiamento in ogni caso non funzionano per coniche degeneri e, soprattutto, per curve algebriche in generale.

Un'ultima obiezione contro la Definizione 1 è che essa ha poco a che fare con la Fisica, in particolare con la Meccanica, dove come sappiamo invece la tangente gioca un ruolo fondamentale.

2 Derivata e tangente

Nella scuola secondaria di II grado il concetto di tangente ad una conica viene usualmente recuperato e rigorizzato quando si affronta lo studio delle derivate per funzioni reali di variabile reale. Per le curve che sono grafici di funzioni derivabili l'equazione della retta tangente è definita come segue.

Definizione 2. *Sia* $f:(a,b)\rightarrow\Re$ *una funzione derivabile nell'intervallo aperto* $(a,b)\subseteq\Re$ *allora la retta tangente al grafico di* f *nel punto* $x_0\in(a,b)$ *ha equazione*

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \qquad (1)$$

dove

$$f'(x_0)=\lim_{x\rightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2).$$

La definizione precedente non contempla il caso in cui la retta tangente sia verticale, caso che si può trattare comunque studiando i limiti destro e sinistro della derivata prima. In modo intuitivo questa definizione ci informa del fatto che geometricamente la pendenza della retta tangente al grafico di f è il limite della pendenza delle rette secanti passanti per il punto di tangenza $(x_0, f(x_0))$ e per un altro punto del grafico della funzione $(x, f(x))$. Inoltre, se f viene pensata come la legge oraria di un punto materiale che si muove di moto rettilineo al variare del tempo, la derivata prima rappresenta fisicamente la velocità istantanea di quel punto.

Sembra tutto piuttosto chiaro ma è sufficiente qualche esempio per turbare questo rassicurante scenario.

Prendiamo, ad esempio, la funzione

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

che è derivabile nell'origine e ha come tangente nel punto $x=0$ la retta di equazione $y=0$. Come evidenziato in [2] non è tuttavia facile in questo caso figurarsi l'andamento delle pendenze delle rette secanti e ancora di meno essere convinti intuitivamente dell'esistenza della tangente.

Ancora più complessa è la situazione nel seguente caso

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x), & x\in\Re-Q \\ x^2 & x\in Q \end{cases}$$

dove Q indica l'insieme dei numeri razionali.

Le critiche che si possono in generale muovere alla Definizione 2 si possono così riassumere:

a) si appoggia al concetto non semplice di limite;

b) non è sempre geometricamente intuitiva;

c) non si estende a funzioni in più variabili;

d) è collocata tardi nel curriculum, anche a distanza di due anni dalla trattazione della Meccanica.

Nonostante queste difficoltà osserviamo che per curve piane di equazione $g(x,y)=0$, che non siano grafici di funzioni reali di variabile reale, si riesce ancora ad utilizzare la Definizione 2 se si riesce a determinare una funzione implicitamente definita nell'equazione di partenza. Ad esempio, data l'ellisse di equazione

$$x^2+4y^2=1$$

se si cerca l'equazione della tangente nel punto di coordinate $(1/2,-\sqrt{3}/4)$ è noto che essa si può determinare come la tangente al grafico della funzione

$$y(x)=\frac{-\sqrt{1-x^2}}{2}$$

nel punto di ascissa $1/2.$

3 Infinitesimi

Per ovviare al problema c), ma non solo per questo motivo, nello studio dell'analisi al primo anno di università si formula una definizione alternativa di derivata e, successivamente di tangente al grafico di una funzione, ricorrendo al concetto di infinitesimo.